

Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664  
Volume 21, dez. 2021

**Mateus Pereira Araujo**

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"  
mateus.araujo@unesp.br

**Luciana de Fátima Martins**

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"  
luciana.martins@unesp.br

## Contorno aparente, Teorema de Koenderink e suas extensões para superfícies em $\mathbb{R}^3$

Apparent contour, Koenderink's Theorem and its extensions for surfaces in  $\mathbb{R}^3$

### Resumo

Este artigo tem como objetivo, usando ferramentas de Teoria de Singularidades e da Geometria Diferencial, obter informações sobre a forma de uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ . Estudamos propriedades sobre a projeção ortogonal, as quais aparecem no estudo de contato de superfícies com retas, e a geometria de alguns conjuntos que aparecem naturalmente no estudo dessa aplicação, como o gerador de contorno e o contorno aparente. A partir desses conjuntos e do Teorema de Koenderink, buscaremos informações sobre a superfície projetada.

Este trabalho é parte da dissertação de mestrado do primeiro autor, orientado pela segunda autora e financiado pela FAPESP, processo 2019/19714-0.

**Palavras-chave:** Teoria de Singularidades. Projeção Ortogonal. Contorno Aparente. Teorema de Koenderink. Cúspide.

### Abstract

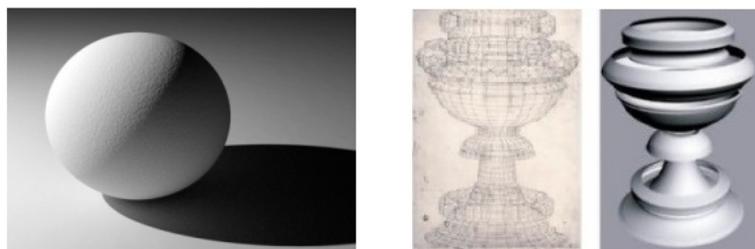
This work aims to get information about the shape of a surface in  $\mathbb{R}^3$ . For this we study properties about the orthogonal projection, which appears in the study of contact of a surface with lines, and the geometry of some sets which appears naturally in the study of this map, such as the contour generator and the apparent contour. From these sets and from Koenderink's Theorem we will seek information about the projected surface. This work is part of the master dissertation of the first author under supervision of the second author, and it is supported by FAPESP grant 2019/19714-0.

**Keywords:** Singularity Theory. Orthogonal Projection. Apparent Contour. Koenderink's Theorem, Cusp.



# 1 Introdução

O objetivo deste artigo é apresentar propriedades de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  que fornecem informações sobre a forma da superfície. Estudaremos, do ponto de vista matemático, um problema de imagens computacionais para imagens naturais, que é determinar, através da projeção de um objeto, suas características geométricas. Imagens naturais são imagens de objetos obtidas pela projeção de raios de luz refletidos em um plano de visualização.



**Figura 1** - À esquerda, exemplo de imagem natural. Fonte: <<https://www.quora.com/Why-arent-shadows-pitch-black>>. Acesso em 20 de julho de 2021. À direita reconstrução de superfícies usando imagens naturais. Fonte: Colombo, Del Bimbo, Pernici, 2005.

O contorno aparente é uma curva plana obtida a partir da projeção de uma superfície sobre um plano. O Teorema de Koenderink é um importante resultado que relaciona a geometria de uma superfície regular com a do contorno aparente.

Daremos enfoque neste trabalho ao estudo do contorno aparente quando este é uma curva regular e do Teorema de Koenderink para superfícies regulares, que permitirão obter características geométricas da superfície projetada. O contorno aparente de uma superfície aparece como conjunto singular de uma dada aplicação, a projeção ortogonal da superfície em um plano perpendicular a direção de projeção  $\mathbf{v}$ , que por sua vez é a aplicação de contato da superfície com retas paralelas a  $\mathbf{v}$ . O conceito de contato entre subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  é uma importante ferramenta da Teoria de Singularidades para o estudo da geometria de subvariedades de  $\mathbb{R}^n$ . É um campo atual de pesquisa considerar extensões do Teorema de Koenderink para contorno aparente sendo uma curva singular ou para superfícies singulares. Iremos apresentar, de maneira breve, um pouco deste estudo, considerando algumas situações particulares de contorno aparente e superfície.

Organizamos este artigo da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos, de maneira breve, os conceitos e resultados básicos de Teoria de Singularidades que precisaremos no decorrer do trabalho. O mesmo fazemos na Seção 3 com o conceito de contato entre subvariedades de  $\mathbb{R}^n$ , aplicando o estudo a um caso particular, o contato de superfícies com retas. Na Seção 4, focamos nosso estudo no caso em que a superfície é regular e o contorno aparente é uma curva regular. Apresentamos definições e resultados sobre o contorno aparente, o Teorema de Koenderink e algumas maneiras de obter informações da superfície a partir do contorno aparente. Na Seção 5, ainda nos restringindo ao caso de superfícies regulares, consideramos o caso em que o contorno aparente possui singularidades e estudamos sua relação com a singularidade da projeção ortogonal na direção de projeção, assim como uma extensão do Teorema de Koenderink quando o contorno aparente possui uma (2,3)-cúspide, que é um tipo especial de singularidade. Na Seção 6 passamos a considerar superfícies singulares, focando nosso estudo na cuspidal edge, que é uma superfície com singularidades de posto 1, e apresentando uma versão do Teorema de Koenderink para este caso.

Nossa principal contribuição neste trabalho é apresentar ao leitor um texto em português reunindo material presente em diferentes livros e artigos científicos, e que possa ser motivador para os alunos

interessados no estudo da geometria de superfícies, além do ponto de vista tradicional da Geometria Diferencial. Ao leitor interessado em maiores detalhes ou também no estudo relacionado ao que apresentamos aqui, mas considerando a superfície singular cross-cap, recomendamos os artigos científicos que estão na bibliografia deste artigo, ou a dissertação de mestrado do primeiro autor.

## 2 Teoria de Singularidades

O estudo da Teoria de Singularidades nasce a partir da classificação de singularidades do plano no plano. Mais tarde, a introdução de grupos que agem sobre o conjunto de germes de aplicações estabelece a base para a definição do conceito de determinação finita de germes de aplicações, que está relacionado com a existência de deformações e desdobramentos versais.

Nesta seção revisamos algumas definições e resultados sobre Teoria de Singularidades essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

**Definição 1** *Sejam  $X$  e  $Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  contendo um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $X$  é equivalente a  $Y$  se existe um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , com  $p \in U$ , tal que  $X \cap U = Y \cap U$ .*

A definição acima gera uma relação de equivalência nos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que contém  $p$ . A classe de equivalência de um subconjunto  $X$  é chamada **germe** de  $X$  em  $p$ , e denotada por  $(X, p)$ .

**Definição 2** *Sejam  $U, V$  abertos em  $\mathbb{R}^n$  contendo  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  aplicações diferenciáveis. Dizemos que  $f$  é equivalente a  $g$ , e denotamos por  $f \sim g$ , se existe um aberto  $W \subset U \cap V$ , tal que  $f|_W = g|_W$ .*

A relação  $\sim$  definida acima é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  definidas em uma vizinhança de  $p$ . A classe de equivalência de uma aplicação  $f$  é chamada de **germe** da aplicação  $f$  e denotada por  $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Quando queremos explicitar a imagem de  $p$  por um representante (e portanto todos) de  $f$ , digamos  $f(p) = q$ , escrevemos  $f : (\mathbb{R}^n, p) \rightarrow (\mathbb{R}^m, q)$ .

Dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ , onde  $\mathbf{0}$  denota o vetor nulo de  $\mathbb{R}^n, n \neq 1$ , são  **$\mathcal{A}$ -equivalentes** se existem germes de difeomorfismos  $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$  e  $k : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$  tal que  $g = k \circ f \circ h^{-1}$ . Quando isso acontece, denotamos  $f \sim_{\mathcal{A}} g$ .

Estamos interessados na classificação via  $\mathcal{A}$ -equivalência de germes de  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  em  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  com  $\mathcal{A}_e$ -codimensão  $\leq 2$ . É mostrado em [1,2] que a codimensão de um germe está intimamente relacionada a essa classificação, uma vez que germes de codimensão finita são finitamente determinados, isto é, são equivalentes aos seus respectivos desenvolvimentos de Taylor até o grau de determinação. Este resultado facilita a classificação de germes de codimensão finita pois permite passar o problema de classificação para o espaço de jatos, que é formado por polinômios. A Tabela 1 contém o nome, a forma normal e o grau de determinação das singularidades de  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  em  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  com  $\mathcal{A}_e$ -codimensão  $\leq 2$  e pode ser encontrada em [2].

Outro tipo importante de equivalência é a  $\mathcal{K}$ -equivalência, também chamada de **equivalência de contato**. Dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$  são  **$\mathcal{K}$ -equivalentes** se existe um germe de difeomorfismo  $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbf{0}, \mathbf{0})) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbf{0}, \mathbf{0}))$  que pode ser escrito na forma  $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$  com  $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$  um germe de difeomorfismo e  $H_1(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , para todo  $x$  em uma vizinhança de  $\mathbf{0}$ , tal que  $(x, g(x)) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x)))$ . Quando isso acontece, denotamos  $f \sim_{\mathcal{K}} g$ .

Dados dois germes  $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$  é possível mostrar que se  $f \sim_{\mathcal{A}} g$ , então  $f \sim_{\mathcal{K}} g$ .

**Tabela 1** - Classificação de germes de singularidades de  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  em  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ , com  $\mathcal{A}_e$ -codimensão  $\leq 2$ .

Nome	Forma Normal	$\mathcal{A}_e - cod$
Dobra	$(x, y^2)$	0
Cúspide	$(x, xy + y^3)$	0
Lábios/Bicos	$(x, y^3 \pm x^2y)$	1
Ganso	$(x, y^3 \pm x^3y)$	2
Rabo de Andorinha	$(x, xy + y^4)$	1
Borboleta	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$	2
Gaivota	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$	2

Fonte: Rieger (1987).

### 3 Contato entre subvariedades de $\mathbb{R}^n$

O conceito de contato entre subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  é uma ferramenta importante da Teoria de Singularidades para o estudo da geometria diferencial de subvariedades em  $\mathbb{R}^n$ .

A seguir, apresentaremos brevemente a noção de contato entre duas subvariedades diferenciáveis em  $\mathbb{R}^n$  em um ponto  $p \in \mathbb{R}^n$ , aplicaremos essa teoria ao estudo do contato entre uma superfície regular  $M$  e retas  $e$ , desse estudo, obteremos informações geométricas sobre  $M$ .

**Definição 3** *Sejam  $M_i, N_i, i = 1, 2$  subvariedades de  $\mathbb{R}^n$  com  $\dim(M_1) = \dim(M_2) = m$  e  $\dim(N_1) = \dim(N_2) = d$ . Dizemos que o contato entre  $M_1$  e  $N_1$  em  $y_1 \in M_1 \cap N_1$  é do mesmo tipo que o contato entre  $M_2$  e  $N_2$  em  $y_2 \in M_2 \cap N_2$  se existe um germe de difeomorfismo  $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$  tal que  $\Phi(M_1) = M_2$  e  $\Phi(N_1) = N_2$ . Neste caso, escrevemos  $K(M_1, N_1; y_1) = K(M_2, N_2; y_2)$ .*

A definição acima gera uma relação de equivalência entre os pares de subvariedades de  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $M$  é um germe de subvariedade dado como imagem de um germe de imersão  $g : (\tilde{M}, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ , isto é  $g(\tilde{M}) = M$ , onde  $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^l$  é uma subvariedade  $m$ -dimensional, e  $N$  é um germe de subvariedade dado localmente como conjunto de zeros de um germe de submersão  $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbf{0})$ , isto é  $N = f^{-1}(\mathbf{0})$ , o germe de composição  $f \circ g$  é chamado de germe de **aplicação de contato** entre  $M$  e  $N$ .

É possível dizer que o contato entre  $M_1$  e  $N_1$  em  $y_1$  é do mesmo tipo que o contato entre  $M_2$  e  $N_2$  em  $y_2$  analisando apenas os germes de aplicações de contato entre essas subvariedades. Mais precisamente, vale o seguinte resultado.

**Teorema 4** ([1]) *Sejam  $g_i : (M_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$  germes de imersões e  $f_i : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathbf{0})$  germes de submersões com  $N_i = f_i^{-1}(\mathbf{0})$ ,  $i = 1, 2$ . Os pares  $(M_1, N_1)$  e  $(M_2, N_2)$  têm o mesmo tipo de contato se, e somente se,  $f_1 \circ g_1$  e  $f_2 \circ g_2$  são  $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

Vale ressaltar que, dadas duas subvariedades, podemos fazer diferentes escolhas de germes de imersão e submersão para obtê-las. No entanto, é provado em [1] que a  $\mathcal{K}$ -classe do germe de aplicação de contato depende apenas das subvariedades, e não dos germes de aplicações usados para obtê-las.

Segue do Teorema 4 que podemos classificar o tipo de contato entre subvariedades de acordo com as  $\mathcal{K}$ -singularidades do germe de aplicação de contato.

### 3.1 Contato com retas

Estudamos no que segue as singularidades da projeção ortogonal em uma direção  $\mathbf{v}$ . Como veremos, a projeção ortogonal pode ser usada para classificar o contato de superfícies com retas. Enunciaremos, ao final desta seção, uma classificação das singularidades da projeção ortogonal para superfícies na forma de Monge  $z = f(x, y)$  em função dos coeficientes de Taylor de  $f$ . Essa classificação fornecerá informações geométricas sobre a superfície projetada.

Seja  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ . Então  $\mathbf{v}$  é um vetor ortogonal a  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ , onde  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  é o plano tangente à  $\mathbb{S}^2$  em  $\mathbf{v}$  centrado na origem. A **projeção ortogonal**  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  dada por  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(y) = y - \langle y, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$  é uma submersão e  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}^{-1}(0)$  é a reta paralela a  $\mathbf{v}$  passando pela origem.

Nesta seção, vamos considerar uma superfície  $M$  parametrizada localmente por uma imersão  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  em um ponto  $p \in M$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$  contendo a origem com  $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = p$ .

A **projeção ortogonal de  $M$**  em  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  é a aplicação composta  $P_{\mathbf{v}} = \mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{x} : U \rightarrow T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  dada por

$$P_{\mathbf{v}}(q) = \mathbf{x}(q) - \langle \mathbf{x}(q), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}. \quad (1)$$

Assim, pelo Teorema 4,  $P_{\mathbf{v}}$  dada em (1) é um representante para o germe de aplicação de contato de  $M$  com a reta paralela a  $\mathbf{v}$  passando pela origem.

Notemos que não há perda de generalidade em considerar a reta passando pela origem. Isso acontece pois, se  $\ell$  é uma reta paralela a  $\mathbf{v}$  passando por um ponto  $Z \in \mathbb{R}^3$ , então a aplicação de contato de  $\ell$  com  $M$  difere de  $P_{\mathbf{v}}$  apenas por constante. Dessa forma, a  $\mathcal{K}$ -classe de singularidade do germe de aplicação de contato de  $M$  com  $\ell$  é a mesma da aplicação  $P_{\mathbf{v}}$ .

Fazendo uma identificação de  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  com  $\mathbb{R}^2$  tal que  $P_{\mathbf{v}}(\mathbf{0})$  é a origem, então  $P_{\mathbf{v}}$  é um germe de  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  em  $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ , como ilustra o seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 & & (M, p) \\
 & \nearrow \mathbf{x} & \downarrow \mathcal{P}_{\mathbf{v}} \\
 (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) & \xrightarrow{P_{\mathbf{v}}} & (T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2, P_{\mathbf{v}}(\mathbf{0})) \simeq (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})
 \end{array}$$

Logo, para obter a classificação das singularidades da projeção ortogonal de  $M$  e, portanto, a classificação do tipo de contato de  $M$  com uma reta paralela a  $\mathbf{v}$ , basta conhecer as singularidades do plano no plano.

Faremos o estudo das singularidades da projeção ortogonal via  $\mathcal{A}$ -equivalência. Há uma vantagem de se considerar as  $\mathcal{A}$ -singularidades do germe  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{x}$  ao invés das  $\mathcal{K}$ -singularidades. Pode-se mostrar que, quando a dimensão da meta é maior do que 1, se dois germes de aplicações de contato  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{x}$  e  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}'} \circ \mathbf{x}'$  são  $\mathcal{A}$ -equivalentes, além do conjunto de seus zeros serem difeomorfos, os conjuntos singular e discriminante desses dois germes também são difeomorfos.

Sabemos que  $P_{\mathbf{v}}$  é singular em  $q$  se, e somente se,  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  é singular em  $\mathbf{x}(q)$ . A proposição a seguir diz em que pontos de  $M$  a aplicação  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  é singular.

**Proposição 5** Dado  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ , a projeção ortogonal  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  é singular em  $p \in M$  se, e somente se,  $\mathbf{v}$  é tangente à  $M$  em  $p$ .

**Demonstração:** Seja  $p = \mathbf{x}(q)$ , com  $q \in U$ . Então  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  é singular em  $p$  se, e somente se,  $\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial x}(q)$  e  $\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial y}(q)$  são vetores linearmente dependentes, ou ainda, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial x}(q) = \alpha \frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial y}(q)$ .



Por simplicidade, vamos omitir o ponto  $q$  onde as funções são avaliadas e denotaremos por  $\mathbf{x}_x$  e  $\mathbf{x}_y$  as derivadas parciais de  $\mathbf{x}$  com relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente. Assim,  $P_{\mathbf{v}}$  é singular em  $q$  se, e somente se,

$$\mathbf{x}_x - \langle \mathbf{x}_x, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = \alpha (\mathbf{x}_y - \langle \mathbf{x}_y, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}) \Leftrightarrow \langle \alpha \mathbf{x}_y - \mathbf{x}_x, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = \alpha \mathbf{x}_y - \mathbf{x}_x,$$

ou seja, se e somente se  $\mathbf{v}$  é tangente à  $M$  em  $p$ . □

O próximo resultado complementa informações sobre as singularidades de  $P_{\mathbf{v}}$ .

**Teorema 6** ([1]) *Existe um conjunto aberto e denso  $O_2$  de imersões  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que, dado  $\mathbf{x} \in O_2$ , a superfície  $M = \mathbf{x}(U)$  tem a seguinte propriedade: para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ , a projeção ortogonal  $P_{\mathbf{v}}$  tem apenas  $\mathcal{A}$ -singularidades com  $\mathcal{A}_e$ -codimensão  $\leq 2$ .*

**Definição 7** *Uma superfície é chamada **genérica** (para a projeção ortogonal) se alguma de suas parametrizações locais pertencer ao conjunto  $O_2$  dado no Teorema 6.*

Como já conhecemos as singularidades de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  com  $\mathcal{A}_e$ -codimensão  $\leq 2$  (dadas na Tabela 1), o Teorema 6 permite conhecer o tipo de contato de uma superfície genérica com qualquer reta em  $\mathbb{R}^3$ .

Antes de enunciar o teorema que irá relacionar a geometria de  $M$  com o tipo de contato entre  $M$  e uma reta paralela à uma direção tangente  $\mathbf{v}$ , apresentaremos a definição de ponto flecnodal, a qual está relacionada com o contato com retas, tomando parametrizações de tal forma que a aplicação de contato seja uma função real.

Vamos considerar  $M$  dada por  $F^{-1}(0)$ , onde  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e 0 valor regular de  $F$ , e  $\ell$  uma reta em  $\mathbb{R}^3$  passando por  $p = (x_0, y_0, z_0)$  paralela a uma direção  $\mathbf{v}$ , dada como imagem da imersão  $\alpha(t) = p + t\mathbf{v}$ .

O germe  $g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $g(t) = F \circ \alpha(t)$  é um germe de aplicação de contato de  $M$  com  $\ell$ . Como  $g$  é um germe de função real, a *ordem de contato* de  $M$  com  $\ell$  é definida da seguinte forma.

**Definição 8** *Dizemos que a reta  $\ell$  tem **contato de ordem  $k$** , para algum  $k \geq 1$ , com a superfície  $M$  em  $p = \alpha(0)$  quando*

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0 \quad e \quad g^{(k)}(0) \neq 0,$$

onde  $g^{(i)}$  denota a  $i$ -ésima derivada de  $g$ . Dizemos que o contato é de **ordem pelo menos  $k$** , ou ainda que  $\hat{e} \geq k$  se  $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$ .

Dizer que a reta  $\ell$  e  $M$  têm contato de ordem  $k$  em  $p$  é equivalente a dizer que aplicação de contato  $g$  é uma singularidade  $A_{k-1}$ .

Quando  $M$  é dada na forma de Monge  $z = f(x, y)$ , podemos escrever  $M = F^{-1}(0)$ , onde  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ . Denotando  $\mathbf{v} = (a, b, c)$ , obtemos

$$g'(t) = af_x + bf_y - c, \quad g''(t) = a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + b^2 f_{yy},$$

onde as derivadas parciais são avaliadas em  $(x_0 + at, y_0 + bt)$ .

Assim as seguintes condições são necessárias para que  $M$  e a reta  $\ell = p + t\mathbf{v}$  tenham contato de ordem  $\geq 3$  em  $p = \alpha(0) = (x_0, y_0, z_0)$

$$c = af_x + bf_y \tag{2}$$

e

$$a^2 f_{xx} + 2ab f_{xy} + b^2 f_{yy} = 0 \quad (3)$$

onde as derivadas de  $f$  são avaliadas em  $(x_0, y_0)$ .

A condição (2) é equivalente a dizer que  $\mathbf{v}$  é tangente à  $M$  em  $p$ , e a condição (3) é equivalente a dizer que  $\mathbf{v}$  é uma direção assintótica em  $p$ . As identidades sobre direções assintóticas usadas acima podem ser encontrada em [1], p. 144.

**Observação 9** *Do que fizemos acima, concluímos que direções assintóticas em um ponto são as direções de retas com contato de ordem maior ou igual a 3 com a superfície naquele ponto. Reciprocamente, se  $\ell = p + t\mathbf{v}$  tem contato de ordem  $\geq 3$  com  $M$  em  $p$ , então  $\mathbf{v}$  é uma direção assintótica à  $M$  em  $p$ .*

**Definição 10** *Um ponto  $p \in M$  é chamado de **ponto flecnodal** se existe uma reta tangente à  $M$  em  $p$  com contato de ordem  $\geq 4$  com  $M$  em  $p$ . O conjunto flecnodal em  $M$  é o conjunto dos pontos flecnodais de  $M$ .*

Pela Observação 9, pontos flecnodais ocorrem apenas na parte não elíptica de  $M$ .

É mostrado em [1] que, genericamente, o conjunto flecnodal de uma superfície, quando não vazio, é uma curva regular. Além disso, pontos flecnodais coincidem com as inflexões geodésicas das curvas assintóticas.

No que segue, iremos considerar  $M$  dada na forma de Monge  $z = f(x, y)$ , com  $p$  sendo a origem de  $\mathbb{R}^3$ ,  $T_p M$  o plano  $\{z = 0\}$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ . Com abuso de notação, denotaremos também por  $f(x, y)$  a expansão de Taylor de  $f$  em torno da origem, da seguinte maneira

$$f(x, y) = a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2 + a_{30}x^3 + a_{31}x^2y + a_{32}xy^2 + a_{33}y^3 + \dots \quad (4)$$

A proposição que enunciaremos a seguir fornece algumas informações geométricas sobre uma superfície na forma de Monge  $z = f(x, y)$  em função dos coeficientes de Taylor de  $f$ . Esta proposição auxilia na demonstração do teorema que fornece o reconhecimento das singularidades da projeção ortogonal em função destes coeficientes. Apesar de não apresentarmos a demonstração do teorema, enunciamos a proposição pois ela será útil nas próximas seções.

**Proposição 11** ([1]) *Sejam  $M$  uma superfície dada na forma de Monge  $z = f(x, y)$ , com  $p = (0, 0, 0)$ ,  $T_p M$  sendo o plano  $\{z = 0\}$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (a) *O ponto  $p$  é parabólico se, e somente se,  $a_{21}^2 - 4a_{20}a_{22} = 0$ .*
- (b) *A direção  $\mathbf{v}$  é assintótica em  $p$  se, e somente se,  $a_{22} = 0$ .*

Finalmente, enunciaremos agora o resultado que relaciona o contato entre  $M$  e retas com a geometria de  $M$ . A partir dos coeficientes de Taylor de  $f$  podemos classificar o tipo de contato de  $M$  com a reta na direção  $\mathbf{v}$  e obter suas caracterizações geométricas.

**Teorema 12** ([1]) *Sejam  $M$  uma superfície dada na forma de Monge  $z = f(x, y)$ , com  $f(0, 0) = 0$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ ,  $p = (0, 0, 0)$ ,  $T_p M$  o plano  $\{z = 0\}$ , e consideremos a expansão de Taylor de  $f$  em torno de  $(0, 0)$  dada em (4). A condição para  $P_{\mathbf{v}}$  ter uma singularidade genérica em  $(0, 0)$  é dada na Tabela 2 em função dos coeficientes  $a_{ij}$ , bem como as caracterizações geométricas para essas singularidades.*



**Tabela 2** - Condições algébricas e caracterizações geométricas para as singularidades locais de  $P_{\mathbf{v}}$ .

Nome	Condições Algébricas	Caracterizações Geométricas
Dobra	$a_{22} \neq 0$	$\mathbf{v}$ direção tangente não assintótica à $M$ em $p$
Cúspide	$a_{22} = 0, a_{21} \neq 0, a_{33} \neq 0$	$p$ ponto hiperbólico e $\mathbf{v}$ direção assintótica em $p$
Lábios/Bicos	$a_{22} = 0, a_{21} = 0, a_{33} \neq 0,$ $a_{32}^2 - 3a_{31}a_{33} \neq 0$	$p$ ponto parabólico e $\mathbf{v}$ direção assintótica em $p$
Ganso	$a_{22} = 0, a_{21} = 0, a_{33} \neq 0,$ $a_{32}^2 - 3a_{31}a_{33} = 0,$ $27a_{41}a_{33}^3 - 18a_{42}a_{32}a_{33}^2 + 9a_{43}a_{32}^2a_{33} - 4a_{44}a_{32}^2 \neq 0$	$p$ ponto parabólico, $\mathbf{v}$ direção assintótica em $p$ e a imagem de Gauss do conjunto parabólico tem uma inflexão geodésica
Rabo de Andorinha	$a_{22} = 0, a_{33} = 0, a_{21} \neq 0, a_{44} \neq 0$	$p$ ponto flecnodal hiperbólico e $\mathbf{v}$ direção assintótica em $p$
Borboleta	$a_{22} = 0, a_{33} = 0, a_{44} = 0, a_{21} \neq 0,$ $a_{55} \neq 0, (8a_{55}a_{77} - 5a_{66}^2)a_{21}^2 + 2a_{55}(a_{32}a_{66} - 20a_{43}a_{55})a_{21} + 35a_{32}^2a_{55}^2 \neq 0$	$p$ ponto flecnodal hiperbólico, $\mathbf{v}$ direção assintótica em $p$ e tangente à curva flecnodal em $p$
Gaivota	$a_{22} = 0, a_{21} = 0, a_{33} = 0, a_{32} \neq 0,$ $a_{44} \neq 0, a_{55}a_{32}^2 - 2a_{43}a_{44}a_{32} + 4a_{31}a_{44}^2 \neq 0$	$p$ uma cúspide de Gauss (parabólico) e $\mathbf{v}$ uma direção assintótica em $p$

Fonte: Izumiya (2015).

## 4 Contorno aparente e o Teorema de Koenderink

Estudaremos agora a geometria do conjunto crítico (ou singular) e do conjunto de valores críticos da projeção ortogonal de uma superfície sobre um plano. Genericamente, quando a direção de projeção é não assintótica, esses conjuntos são curvas regulares (Proposição 17).

Vamos apresentar o Teorema de Koenderink, que apresenta uma fórmula que relaciona a curvatura Gaussiana de uma superfície regular com as curvaturas de duas curvas, uma delas sobre a superfície e outra obtida como imagem da projeção ortogonal de uma curva da superfície.

Nesta seção  $M$  denotará uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ ,  $p \in M$ ,  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização local de  $M$  em  $p$ , com  $U$  um aberto em  $\mathbb{R}^2$  contendo  $q$  e  $\mathbf{x}(q) = p$ , e  $P_{\mathbf{v}}$  é a projeção ortogonal de  $M$  dada em (1), onde  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ .

Pela Proposição 5, a projeção ortogonal  $P_{\mathbf{v}}$  é singular em  $p$  (e, portanto  $P_{\mathbf{v}}$  é singular em  $q$ ) se, e somente se,  $\mathbf{v}$  é um vetor tangente à  $M$  em  $p$ . Denotemos por  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  o conjunto singular de  $P_{\mathbf{v}}$  e por  $\Delta_{\mathbf{v}}$  a imagem de  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  por  $P_{\mathbf{v}}$ . Então,

$$\Sigma_{\mathbf{v}} = \{p \in M; \mathbf{v} \in T_p M\}$$

e

$$\Delta_{\mathbf{v}} = P_{\mathbf{v}}(\Sigma_{\mathbf{v}}).$$

Esses conjuntos recebem os seguintes nomes especiais:

**Definição 13** O conjunto  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é chamado de **gerador de contorno** de  $M$  ao longo da direção  $\mathbf{v}$  e o conjunto  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é chamado de **perfil** ou **contorno aparente** de  $M$  ao longo da direção  $\mathbf{v}$ .

Como  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é formado pelos pontos de  $M$  em que  $\mathbf{v}$  é uma direção tangente nesses pontos então, geometricamente,  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é o conjunto de pontos em que quando vista na direção  $\mathbf{v}$  a superfície parece se dobrar.

**Exemplo 14** Sejam  $M$  a superfície parametrizada por  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, -y^3 - xy)$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ . Vamos encontrar o gerador de contorno e o contorno aparente para essa superfície na direção  $\mathbf{v}$  (Figura 2).

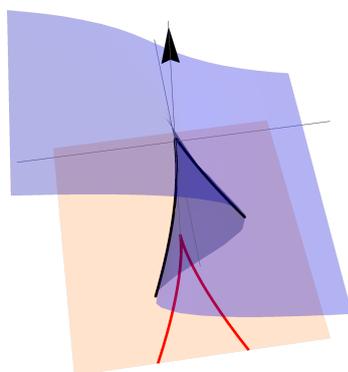
A projeção ortogonal de  $M$  na direção  $\mathbf{v}$  é dada por  $P_{\mathbf{v}}(x, y) = \mathbf{x}(x, y) - \langle \mathbf{x}(x, y), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = (x, 0, -xy - y^3)$ . Assim, o conjunto singular de  $P_{\mathbf{v}}$  é  $\Sigma(P_{\mathbf{v}}) = \{(x, y) \mid -x - 3y^2 = 0\}$ . Logo, o gerador de contorno é o conjunto

$$\Sigma_{\mathbf{v}} = \mathbf{x}(\Sigma(P_{\mathbf{v}})) = \{(-3t^2, t, -2t^3); t \in \mathbb{R}\},$$

e o contorno aparente é o conjunto

$$\Delta_{\mathbf{v}} = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\Sigma_{\mathbf{v}}) = \{(-3t^2, 0, -2t^3); t \in \mathbb{R}\}.$$

Nesse caso, o gerador de contorno é uma curva regular e o contorno aparente uma curva singular em  $t = 0$ . □



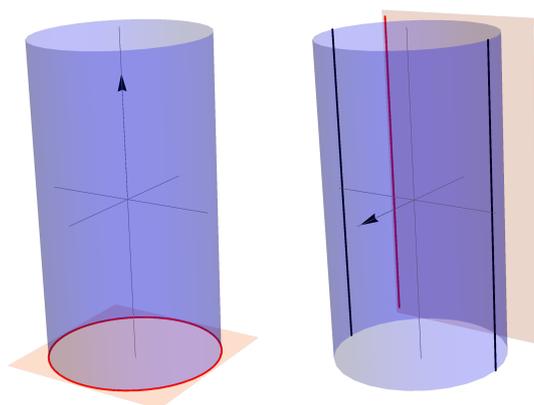
**Figura 2** - Superfície  $M$  do Exemplo 14. O gerador de contorno  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  em preto e o contorno aparente  $\Delta_{\mathbf{v}}$  em vermelho. O plano  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  foi deslocado para uma melhor visualização de  $\Delta_{\mathbf{v}}$ .

**Exemplo 15** Seja  $M$  o cilindro parametrizado por  $\mathbf{x}(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$ .

Se consideramos  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ , então o gerador de contorno de  $M$  é a superfície  $M$ , pois  $\mathbf{v} \in T_p M$  para todo  $p \in M$ . Nesse caso, o gerador de contorno não é uma curva e o contorno aparente é o círculo de raio 1 centrado na origem.

Se considerarmos  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ , então o gerador de contorno de  $M$  será formado pelas retas  $(0, 1, t)$  e  $(0, -1, t)$ . Neste caso, o contorno aparente é formado pelas projeção dessas retas no plano  $y = 0$ . Assim, gerador de contorno e contorno aparente coincidem e são curvas regulares.

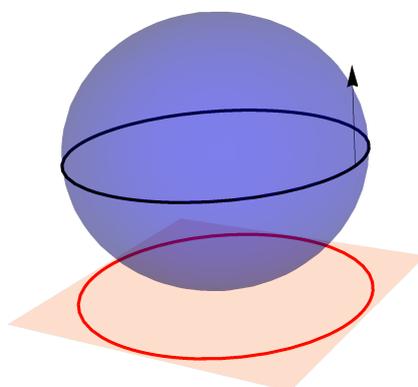
A Figura 3 apresenta o traço da superfície, de  $\Delta_{\mathbf{v}}$  e  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  para os dois casos analisados acima. □



**Figura 3** - Gerador de contorno e contorno aparente para a superfície dada no Exemplo 15 nas direções  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$  e  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ , respectivamente. Os planos  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  foram deslocados para uma melhor visualização de  $\Delta_{\mathbf{v}}$ .

**Exemplo 16** Considere  $M$  como sendo uma esfera de raio  $r$  centrada em  $p = (a, b, c)$  e  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ . O gerador de contorno de  $M$  na direção  $\mathbf{v}$  é o círculo máximo obtido pela interseção de  $M$  com o plano ortogonal a  $\mathbf{v}$  passando por  $p$  e o contorno aparente na direção  $\mathbf{v}$  é a projeção desse círculo no plano  $z = 0$  (Figura 4).

Por exemplo, no caso em que  $p = (0, 0, 0)$  e  $r = 1$ , o gerador de contorno e o contorno aparente na direção  $\mathbf{v}$  coincidem com o círculo  $\{(x, y, 0), x^2 + y^2 = 1\}$ .  $\square$



**Figura 4** - Gerador de contorno e contorno aparente para a esfera na direção  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ . O plano  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  foi deslocado para uma melhor visualização de  $\Delta_{\mathbf{v}}$ .

Como vimos nos exemplos acima, o gerador de contorno nem sempre é uma curva. Supondo que  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é uma curva, podemos relacionar a regularidade das curvas  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  em  $p$  e de  $\Delta_{\mathbf{v}}$  em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$  com propriedades da direção de projeção  $\mathbf{v}$  e do ponto  $p$ . Mais precisamente, vale o seguinte resultado.

**Proposição 17** ([1]) *Supondo que o gerador de contorno  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é uma curva em  $p$ , as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- O gerador de contorno  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é uma curva singular em  $p$  se, e somente se,  $p$  é um ponto parabólico e  $\mathbf{v}$  uma direção assintótica em  $p$ .*
- O contorno aparente  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma curva singular em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$  se e somente se  $\mathbf{v}$  é uma direção assintótica em  $p$ .*

Além de serem úteis na demonstração do Teorema de Koenderink, os resultados que enunciaremos a seguir fornecem algumas propriedades sobre a superfície  $M$ . Dois vetores  $\mathbf{v}, \mathbf{w}$  tangentes à  $M$  em  $p$  são *conjugados* se  $\Pi_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ , onde  $\Pi_p$  é a segunda forma fundamental de  $M$  em  $p$ . Não entraremos em detalhes sobre propriedades e interpretação geométrica de vetores conjugados, os quais podem ser consultados em [1] ou [3], por exemplo. Enunciaremos apenas algumas relações entre um vetor  $\mathbf{v}$  e seu conjugado, denotado por  $\bar{\mathbf{v}}$ , que são necessárias para a demonstração do Teorema de Koenderink que apresentaremos no final desta seção.

**Proposição 18** ([1]) *Se o gerador de contorno  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  de  $M$  é uma curva regular em  $p$ , então o vetor tangente à  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  em  $p$  é conjugado à  $\mathbf{v}$ .*

**Observação 19** *Sejam  $p$  um ponto hiperbólico de uma superfície regular  $M$  e  $r$  uma direção de  $T_pM$ . Se  $r$  é uma direção assintótica e  $\bar{r}$  é uma direção conjugada a  $r$ , então  $r = \bar{r}$ .  $\square$*

**Proposição 20** ([1]) *Sejam  $\mathbf{v} \in T_pM$  e  $\bar{\mathbf{v}}$  um vetor conjugado a  $\mathbf{v}$ . Então:*

$$(a) \kappa_n(\bar{\mathbf{v}}) = \frac{\kappa_n(\mathbf{v})(nl - m^2)(p)\|\mathbf{v}\|}{\|\bar{\mathbf{v}}\|},$$

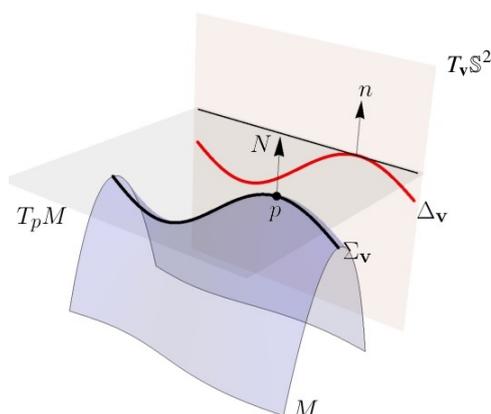
$$(b) \|\mathbf{v}\|^2\|\bar{\mathbf{v}}\|^2 - \langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle^2 = (EG - F^2)(p)\Pi_p(\mathbf{v}, \mathbf{v})^2,$$

onde  $\kappa_n$  é a curvatura normal,  $E, F, G$  e  $l, m, n$  são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $M$ , respectivamente.

**Proposição 21** ([4]) *Sejam  $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ , com  $\mathbf{v}$  uma direção não assintótica em  $p$  e  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  uma curva. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *O vetor normal à superfície  $M$  em  $p$  é paralelo ao vetor normal ao contorno aparente em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$ .*

(b) *O plano tangente à  $M$  em  $p$  intersecciona o plano de projeção  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  na reta tangente ao contorno aparente em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$ , ou seja, a direção tangente à  $\Delta_{\mathbf{v}}$  em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$  está em  $T_pM$ .*



**Figura 5** - Ilustração da Proposição 21.

A seguir, vamos apresentar uma orientação para  $\mathbb{R}^3$ , escolhida em [4], que será importante no Teorema de Koenderink. Esse teorema foi apresentado originalmente por J.J. Koenderink [5]. No entanto, apresentaremos uma prova alternativa dada em [1].

Dado  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$  e supondo que  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é uma curva e  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma curva regular, uma orientação de  $M$  induz uma orientação para o contorno aparente da seguinte forma. Sejam  $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ ,  $N$  a orientação

de  $M$  e consideremos uma direção  $T$  tangente ao contorno aparente em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$ . Como os vetores  $T, N(p), \mathbf{v}$  são dois a dois ortogonais, vamos escolher o vetor  $T$  de forma que  $\{T, N(p), \mathbf{v}\}$  seja uma base ortogonal positiva para  $\mathbb{R}^3$ . Essa orientação induz uma orientação para  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  tomando  $\mathbf{v}$  como vetor normal à  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  e, assim,  $\{T, N(p)\}$  é uma base positiva para  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ . Logo,  $N(p)$  tem o mesmo sentido do rotacionado de  $T$  em  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário (quando olhamos para  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  a partir do semiespaço de  $\mathbb{R}^3$  que aponta  $\mathbf{v}$ ).

**Teorema 22 (Teorema de Koenderink)** *Sejam  $M$  uma superfície regular,  $p \in M$ ,  $\mathbf{v} \in T_p M$  um vetor unitário e suponhamos que  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é uma curva em  $p$ . Se o contorno aparente  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma curva regular em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$ , então,*

$$K(p) = \kappa_n(\mathbf{v})k_{\Delta_{\mathbf{v}}}(\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)), \quad (5)$$

onde  $K$  denota a curvatura Gaussiana de  $M$ ,  $k_{\Delta_{\mathbf{v}}}(\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p))$  é a curvatura do contorno aparente em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$  com sinal determinado pela orientação induzida pela orientação de  $M$  e  $\kappa_n(\mathbf{v})$  é a curvatura normal de  $M$  em  $p$  na direção  $\mathbf{v}$ .

**Demonstração:** Como  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma curva regular em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$  segue da Proposição 17 que  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é uma curva regular em  $p$ . Seja  $\alpha(s)$  uma parametrização local de  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  em  $p$ , por comprimento de arco, com  $\alpha(0) = p$  de tal forma que  $\beta(s) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\alpha(s))$  seja uma parametrização para  $\Delta_{\mathbf{v}}$  com  $\{\beta'(0), N(p), \mathbf{v}\}$  sendo uma base positiva para  $\mathbb{R}^3$ .

Pela Proposição 18, o vetor tangente à  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  em  $p$  é paralelo ao vetor conjugado  $\bar{\mathbf{v}}$  à  $\mathbf{v}$ . Assim,  $\alpha'(0) = \pm \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|}$ . Sem perda de generalidade, vamos supor  $\alpha'(0) = \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|}$ .

Como  $\beta(s) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\alpha(s)) = \alpha(s) - \langle \alpha(s), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$ , então  $\beta'(s) = \alpha'(s) - \langle \alpha'(s), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$  e  $\beta''(s) = \alpha''(s) - \langle \alpha''(s), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$ .

Uma vez que  $\mathfrak{B} = \left\{ \frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|}, N(p) \right\}$  é uma base ortonormal positiva para  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ , denotando por  $\beta'^{\perp}(s)$  o vetor obtido rotacionando  $\beta'(s)$  no sentido anti-horário em um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$ , obtemos  $\frac{\beta'^{\perp}(s)}{\|\beta'(s)\|} = N(p)$  e, se  $\beta'(s) = (\beta'_1(s), \beta'_2(s))_{\mathfrak{B}}$ , então  $\beta'^{\perp}(s) = (-\beta'_2(s), \beta'_1(s))_{\mathfrak{B}}$ , onde  $(a, b)_{\mathfrak{B}} = a \frac{\beta'(0)}{\|\beta'(0)\|} + bN(p)$ . Assim, a curvatura de  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é dada por

$$k_{\Delta_{\mathbf{v}}}(s) = \frac{\langle \beta'^{\perp}, \beta'' \rangle}{\|\beta'\|^3}(s) = \frac{\langle \|\beta'\|N, \beta'' \rangle}{\|\beta'\|^3}(s) = \frac{\langle N, \alpha'' \rangle}{\|\beta'\|^2}(s) = \frac{\kappa_n(\alpha')}{\|\beta'\|^2}(s).$$

Logo, a curvatura de  $\Delta_{\mathbf{v}}$  em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p) = \beta(0)$  é dada por

$$k_{\Delta_{\mathbf{v}}}(0) = \frac{\kappa_n(\bar{\mathbf{v}})}{\|\beta'(0)\|^2}. \quad (6)$$

Como  $\beta'(0) = \alpha'(0) - \langle \alpha'(0), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|} - \left\langle \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|}, \mathbf{v} \right\rangle \mathbf{v} = \frac{\bar{\mathbf{v}} - \langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|}$  obtemos, pela Proposição 20(b)

$$\begin{aligned} \|\beta'(0)\|^2 &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{v}}\|^2} \|\bar{\mathbf{v}} - \langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{\|\bar{\mathbf{v}}\|^2} (\|\bar{\mathbf{v}}\|^2 - \langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \rangle^2) = \frac{1}{\|\bar{\mathbf{v}}\|^2} (EG - F^2)(p) \Pi(\mathbf{v}, \mathbf{v})^2 \\ &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{v}}\|^2} (EG - F^2)(p) \kappa_n(\mathbf{v})^2. \end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima em (6) e usando a Proposição 20(a), obtemos

$$k_{\Delta_{\mathbf{v}}}(0) = \frac{\|\bar{\mathbf{v}}\|^2 \kappa_n(\bar{\mathbf{v}})}{\kappa_n(\mathbf{v})^2 (EG - F^2)(p)} = \frac{(nl - m^2)(p)}{\kappa_n(\mathbf{v}) (EG - F^2)(p)} = \frac{K(p)}{\kappa_n(\mathbf{v})}.$$

Consequentemente,  $K(p) = \kappa_n(\mathbf{v})k_{\Delta_v}(0)$ , como queríamos.  $\square$

Como aplicação do Teorema de Koenderink, vamos classificar os pontos da superfície sobre o gerador de contorno  $\Sigma_v$ , conhecendo o sinal de  $\kappa_n$  em um ponto  $p \in \Sigma_v$  e a curvatura do contorno aparente  $k_{\Delta_v}$ . Notemos que, quando  $\Delta_v$  é uma curva regular então, pela Proposição 17,  $\kappa_n(\mathbf{v}) \neq 0$  em todo ponto  $p \in \Sigma_v$ . Assim, uma vez que  $\kappa_n$  é uma função contínua, segue que  $\kappa_n(\mathbf{v})$  não troca de sinal sobre  $\Sigma_v$ . Portanto, conhecendo o sinal de  $\kappa_n(\mathbf{v})$  em um ponto  $p \in \Sigma_v$  e  $k_{\Delta_v}$ , podemos classificar os pontos de  $\Sigma_v$  em elípticos, parabólicos ou hiperbólicos.

**Exemplo 23** Consideremos o cilindro dado no Exemplo 15 e  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ . Como vimos, o gerador de contorno e o contorno aparente na direção  $\mathbf{v}$  são o conjunto  $\{(0, \pm 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Como  $\Sigma_v$  e  $\Delta_v$  são curvas, com  $\Delta_v$  sendo um par de retas, então  $k_{\Delta_v}(\mathcal{P}_v(p)) = 0$ , para todo  $p \in \Sigma_v$ . Assim, pelo Teorema de Koenderink,  $K(p) = 0$ , para todo  $p \in \Sigma_v$  e, portanto,  $\Sigma_v$  é formado por pontos parabólicos.  $\square$

**Exemplo 24** Sejam  $M$  a superfície dada por  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y + 1, f(x, y))$ , onde  $f(x, y) = 3x^3 - y^2$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ , cujo traço é dado na Figura 6. Vamos considerar  $N(x, y) = \frac{(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1)}{\sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}}$ .

O gerador de contorno de  $M$  na direção  $\mathbf{v}$  é formado pelos pontos  $p \in M$  tal que  $\mathbf{v} \in T_p M$ . Assim,  $\Sigma_v = \{(x, 1, 3x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Com isso,  $\Delta_v = \mathcal{P}_v(\Sigma_v) = \{(x, 0, 3x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Para verificar o sinal da curvatura normal de  $M$  na direção  $\mathbf{v}$  nos pontos do gerador de contorno, consideremos  $C$  a curva parametrizada por  $\gamma(t) = (0, t + 1, -t^2)$ . Essa curva é tal que  $p_0 = \gamma(0) = (0, 1, 0) \in \Sigma_v$  e  $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ . Por definição, a curvatura normal de  $C$  em  $p_0$ , que coincide com a curvatura normal na direção  $\mathbf{v}$ , é dada por  $\kappa_n = k \langle N, n \rangle$ , onde  $k$  é a curvatura de  $\gamma$  em  $t = 0$ ,  $N$  o vetor normal à  $M$  em  $p_0$  e  $n$  o vetor normal normal à  $C$  em  $p_0$ . Logo, o sinal de  $\kappa_n$  coincide com o sinal de  $\langle N, n \rangle$ . Como  $n(0) = (0, 0, -1)$  e  $N(p_0) = (0, 0, 1)$ , segue que,  $\kappa_n < 0$  e, portanto,  $\kappa_n(\mathbf{v}) < 0$ , para todo  $p \in \Sigma_v$ .

Vamos encontrar a curvatura de  $\Delta_v$  e, assim, obter a classificação dos pontos de  $M$ .

Seja  $\alpha(t) = (-t, 0, -3t^3)$  uma parametrização de  $\Delta_v$ . Observamos que esta parametrização é tal que  $\{T, N(p_0), \mathbf{v}\}$  forma uma base positiva para  $\mathbb{R}^3$ , onde  $T = \alpha'(0)$ . Como  $\mathfrak{B} = \{\alpha'(0), N(p_0)\} = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$  é uma base ortonormal positiva para  $T_v \mathbb{S}^2$ , então  $\alpha(t) = a(t)\alpha'(0) + b(t)N(p_0)$ , com  $a(t) = \langle \alpha(t), \alpha'(0) \rangle = t$  e  $b(t) = \langle \alpha(t), N(p_0) \rangle = -3t^3$ . Logo,  $\alpha(t) = (t, -3t^3)_{\mathfrak{B}}$  e, portanto,

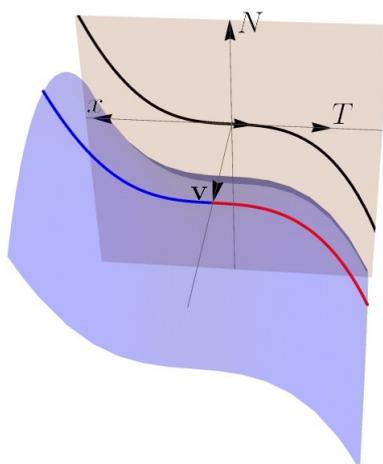
$$k_{\Delta_v}(t) = \frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t)]_{\mathfrak{B}}}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{-18t}{(1 + 81t^4)^{\frac{3}{2}}},$$

onde  $\det[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]_{\mathfrak{B}}$  denota o determinante cujas linhas são formadas pelas coordenadas de  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  na base  $\mathfrak{B}$ .

Logo, a partir de  $k_{\Delta_v}(t)$  podemos classificar os pontos  $p = (t, 1, 3t^3) \in \Sigma_v$  da seguinte maneira:

- Se  $t < 0$ , então  $p$  é um ponto hiperbólico.
- Se  $t = 0$ , então  $p$  é um ponto parabólico.
- Se  $t > 0$ , então  $p$  é um ponto elíptico.

$\square$



**Figura 6** - Superfície  $M$ , contorno aparente (em preto) e gerador de contorno formado por pontos elípticos em vermelho, e pontos hiperbólicos em azul. (Exemplo 24.)

## 5 Contorno aparente singular

Sejam  $M$  uma superfície regular, genérica para a projeção ortogonal (segundo a Definição 7), e  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$ . O Teorema 6 diz quais singularidades podem ocorrer para a projeção ortogonal na direção  $\mathbf{v}$ , e o Teorema 12 fornece uma caracterização geométrica para essas singularidades. Supondo que o gerador de contorno  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é uma curva, pela Proposição 17,  $\Delta_{\mathbf{v}} = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\Sigma_{\mathbf{v}})$  é uma curva singular em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$  se, e somente se,  $\mathbf{v}$  é uma direção assintótica de  $M$  em  $p = \mathbf{x}(q)$ . Por esses resultados, concluímos que  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma curva regular em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$  se, e somente se,  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade do tipo dobra em  $q$ . Assim, para todas as outras singularidades da projeção ortogonal  $P_{\mathbf{v}}$  em  $q$ , o contorno aparente é uma curva singular em  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$ .

Nesta seção, vamos estudar as singularidades do contorno aparente e sua relação com as singularidades da projeção ortogonal em alguns casos. Também veremos uma extensão do Teorema de Koenderink para a singularidade do tipo cúspide para projeção ortogonal, provada em [6].

**Definição 25** Um germe de curva plana  $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  é chamado de

- (a) **(2,3)-cúspide** (ou **cúspide ordinária**) se é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ .
- (b) **(3,4)-cúspide** se é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $\beta(t) = (t^3, t^4)$ .

Os germes de curvas definidos acima são dois tipos de singularidades que podem ocorrer para curvas planas. Um estudo detalhado sobre as singularidades de curvas planas pode ser encontrado em [7]. Enunciaremos a seguir um resultado bem conhecido para o reconhecimento das singularidades que definimos acima.

**Lema 26** Um germe de curva plana  $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  é uma (2,3)-cúspide (resp. (3,4)-cúspide) em 0 se, e somente se,  $\gamma'(0) = \mathbf{0}$  e  $\det[\gamma''(0), \gamma'''(0)] \neq 0$ , equivalentemente  $\gamma''(0)$  e  $\gamma'''(0)$  são vetores linearmente independentes (resp.  $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \mathbf{0}$  e  $\det[\gamma'''(0), \gamma^{(4)}(0)] \neq 0$ , equivalentemente  $\gamma'''(0)$  e  $\gamma^{(4)}(0)$  são vetores linearmente independentes).

Com o lema anterior, vamos relacionar a seguir duas das singularidades da projeção ortogonal em uma direção  $\mathbf{v}$  com a singularidade do contorno aparente. O item (a) foi demonstrado em [6], porém apresentamos aqui uma prova alternativa.

**Proposição 27** *Sejam  $M$  uma superfície regular, genérica para a projeção ortogonal,  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$  e suponhamos que  $\Sigma_{\mathbf{v}}$  é uma curva. Então,*

(a)  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade do tipo cúspide se, e somente se, o contorno aparente  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma (2,3)-cúspide.

(b)  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade do tipo rabo de andorinha se, e somente se, o contorno aparente  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma (3,4)-cúspide.

**Demonstração:** Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $M$  é dada na forma de Monge  $z = f(x, y)$  em  $p = (0, 0, 0)$ , com  $f(x, y)$  dada em (4) e  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ . Pela Proposição 5, a projeção ortogonal  $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$  é singular em  $q = (x, y, f(x, y))$  se, e somente se,  $\mathbf{v} \in T_q M$ , e isso acontece se, e somente se,  $f_y(x, y) = 0$ . Logo,  $\Delta_{\mathbf{v}} = P_{\mathbf{v}}(f_y^{-1}(0))$ , onde  $f_y(x, y) = a_{21}x + 2a_{22}y + a_{31}x^2 + 2a_{32}xy + 3a_{33}y^2 + O(3)$ . Observamos que  $f_y^{-1}(0)$  é uma curva regular em  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  se, e somente se,  $a_{21} \neq 0$  ou  $a_{22} \neq 0$ .

Faremos a demonstração do item (a). O item (b) segue de maneira análoga.

Suponhamos que  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade do tipo cúspide. Então, pelo Teorema 12,  $f_{yx}(0, 0) = a_{21} \neq 0$ . Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança  $V$  de  $(0, 0)$  e uma função  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow J$ , com  $\varepsilon > 0$  e  $J$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ , tal que os pontos  $(x, y) \in f_y^{-1}(0) \cap V$  podem ser escritos da forma  $\alpha(y) = (\varphi(y), y)$ , e  $\varphi'(y) = -\frac{f_{yy}(\varphi(y), y)}{f_{xy}(\varphi(y), y)}$ . Logo,  $\hat{\alpha}(y) = P_{\mathbf{v}} \circ \alpha(y)$  é uma parametrização local para  $\Delta_{\mathbf{v}}$  em  $P_{\mathbf{v}}(p)$ . Tomando a parametrização  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  para  $M$ , uma vez que  $P_{\mathbf{v}}(x, y) = (x, 0, f(x, y))$ , obtemos

$$\hat{\alpha}(y) = (\varphi(y), 0, f(\varphi(y), y)). \quad (7)$$

Assim,

$$\hat{\alpha}'(0) = (0, 0, 0), \quad \hat{\alpha}''(0) = \left( -\frac{6a_{33}}{a_{21}}, 0, 0 \right) \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}'''(0) = \left( \frac{36a_{32}a_{33}}{a_{21}^2}, 0, -12a_{33} \right).$$

Logo, pelo Lema 26 e Teorema 12, que garante que  $a_{33} \neq 0$ , concluímos que  $\hat{\alpha}$  é uma (2,3)-cúspide.

Reciprocamente, suponhamos que o contorno aparente  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma (2,3)-cúspide. Vamos mostrar que  $a_{22} = 0$ ,  $a_{21} \neq 0$  e  $a_{33} \neq 0$ .

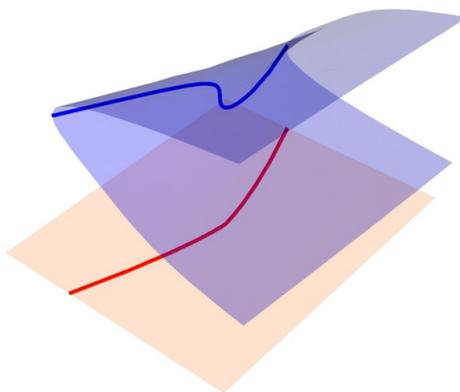
Como  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma curva singular, segue da Proposição 17 que  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$  é uma direção assintótica em  $p$  e, assim, pela Proposição 11,  $a_{22} = 0$ .

Suponhamos que  $a_{21} = 0$ . Neste caso, obtemos que  $f_y^{-1}(0)$  é uma curva singular em  $(0, 0)$ . Seja  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  uma parametrização para  $f_y^{-1}(0)$ , com  $\alpha(0) = (0, 0)$ . Então,  $\hat{\alpha}(t) = P_{\mathbf{v}} \circ \alpha(t) = (\alpha_1(t), 0, f(\alpha_1(t), \alpha_2(t)))$  é uma parametrização para a (2, 3)-cúspide  $\Delta_{\mathbf{v}}$  em  $t = 0$ . Assim,  $\hat{\alpha}'(0) = (\alpha_1'(0), 0, 0) = (0, 0, 0)$ , de onde segue que  $\alpha_1'(0) = 0$ . Como  $\hat{\alpha}''(0) = (\alpha_1''(0), 0, 0)$ ,  $\hat{\alpha}'''(0) = (\alpha_1'''(0), 0, 6a_{33}\alpha_2'(0)^3)$  e, pelo Lema 26,  $\hat{\alpha}''(0)$  e  $\hat{\alpha}'''(0)$  são vetores linearmente independentes, então  $\alpha_2'(0) \neq 0$ , o que contraria o fato de  $\alpha$  ser uma curva singular em  $t = 0$ . Logo,  $a_{21} \neq 0$ .

Como  $a_{21} \neq 0$  e  $a_{22} = 0$ , tomando a parametrização (7) para o contorno aparente, obtemos  $\hat{\alpha}''(0) = \left( -\frac{6a_{33}}{a_{21}}, 0, 0 \right)$  e, portanto, segue do Lema 26 que  $a_{33} \neq 0$ . Logo, pelo Teorema 12, obtemos que  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade cúspide, como queríamos.  $\square$

**Exemplo 28** *Podemos observar a Proposição 27 na superfície dada no Exemplo 14 com a direção  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ . De fato, pelo Teorema 12 a projeção ortogonal  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade cúspide em  $\mathbf{0}$  e, como vimos,  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma (2,3)-cúspide em  $\mathbf{0}$ .*

Considerando  $M$  a superfície parametrizada por  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, xy + y^4)$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$  obtemos, pelo Teorema 12, que  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade rabo de andorinha e, portanto,  $\Delta_{\mathbf{v}}$  é uma (3,4)-cúspide. De fato, é possível mostrar que  $\Delta_{\mathbf{v}} = \{(-4y^3, 0, -3y^4) \mid y \in \mathbb{R}\}$ . A superfície  $M$  e o seu contorno aparente são dados na Figura 7.  $\square$



**Figura 7** - Superfície  $M$  e o contorno aparente dados no Exemplo 28.

Para a singularidade do tipo dobra de  $P_{\mathbf{v}}$  (dada nas Tabelas 1 e 2), a qual possui contorno aparente associado sendo uma curva regular, o Teorema de Koenderink relaciona a curvatura Gaussiana de  $M$  em um ponto do gerador de contorno com a curvatura normal na direção de projeção e a curvatura do contorno aparente. Para os demais tipos de singularidades de  $P_{\mathbf{v}}$  dadas nas Tabelas 1 e 2, o contorno aparente é uma curva singular. Quando  $P_{\mathbf{v}}$  tem uma singularidade do tipo cúspide, vimos na proposição anterior que o contorno aparente é uma curva plana com singularidade sendo uma (2,3)-cúspide. É possível mostrar que a curvatura de uma curva com cúspide ordinária diverge no ponto singular. Em [8], é definida uma curvatura para esse tipo de curva singular. Utilizando esta curvatura, em [6] é provada uma fórmula que relaciona a curvatura Gaussiana da superfície com a curvatura da (2,3)-cúspide, obtendo assim um teorema do tipo de Koenderink, o que apresentamos a seguir (Teorema 31).

**Definição 29** Dada uma (2,3)-cúspide  $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ , a *curvatura cuspidal* de  $\gamma$  em 0 é definida por

$$\mu_{\gamma} = \frac{\det[\gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma''(t)\|^{\frac{5}{2}}} \Big|_{t=0}.$$

Para evitar nos estendermos demais, não entraremos em detalhes sobre propriedades da curvatura cuspidal. Enunciaremos apenas um resultado que será útil na demonstração do teorema que estende o resultado de Koenderink. Mais resultados sobre curvatura cuspidal, suas demonstrações e interpretações geométricas podem ser encontrados em [8].

**Proposição 30** ([6]) Sejam  $\gamma(t) : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$  uma (2,3)-cúspide e  $\kappa_{\gamma}$  a curvatura de  $\gamma$  definida nos pontos regulares. Então

$$|\mu_{\gamma}| = 2\sqrt{\|\gamma''(0)\|} \lim_{t \rightarrow 0} |t\kappa_{\gamma}(t)|.$$

Antes de enunciar o próximo teorema, fixaremos algumas notações.

Sejam  $\mathbf{x} : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$  um germe de superfície regular, com  $M = \mathbf{x}(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$  e  $P_{\mathbf{v}}$  a projeção ortogonal na direção  $\mathbf{v}$ . Suponhamos que  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade cúspide. Então, pelo Teorema 12,  $\mathbf{v}$  é uma direção assintótica e, como vimos na demonstração da Proposição 27, o conjunto singular de  $P_{\mathbf{v}}$  é uma curva regular. Seja  $\alpha(t_c)$  uma parametrização para o conjunto singular de  $P_{\mathbf{v}}$  e  $\beta(t_s)$  uma parametrização para o conjunto  $\{(x, y); \det[\mathbf{x}(x, y), \mathbf{v}, N(\mathbf{0})] = 0\}$ , com  $\alpha(0) = \beta(0) = \mathbf{0}$ . Então  $\hat{\alpha}(t_c) = P_{\mathbf{v}} \circ \alpha(t_c)$  é uma parametrização para o contorno aparente na direção  $\mathbf{v}$  e  $\hat{\beta}(t_s) = \mathbf{x} \circ \beta(t_s)$  é parametrização para a seção normal de  $M$  na direção  $\mathbf{v}$ .

As curvas  $\alpha(t_c)$  e  $\beta(t_s)$  são tangentes em  $\mathbf{0}$ . De fato, como  $\alpha(t_c)$  é uma parametrização para o conjunto singular de  $P_{\mathbf{v}}$ , então  $\bar{\alpha}(t_c) = \mathbf{x} \circ \alpha(t_c)$  é uma parametrização para o gerador de contorno na direção  $\mathbf{v}$ . Observamos que, como  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade cúspide, pelo Teorema 12 obtemos que  $\mathbf{0}$  é um ponto hiperbólico. Assim, pela Proposição 17 a curva  $\bar{\alpha}(t_c)$  é regular. Logo, o vetor  $\frac{d}{dt_c}\bar{\alpha}(0) = d\mathbf{x}_0(\frac{d}{dt_c}\alpha(0))$  é não nulo e, pela Proposição 18, a direção dada por  $\frac{d}{dt_c}\bar{\alpha}(0)$  é conjugada a direção dada pelo vetor  $\mathbf{v}$ . A curva  $\hat{\beta}(t_s) = \mathbf{x} \circ \beta(t_s)$  é uma parametrização para a seção normal na direção  $\mathbf{v}$ . Assim,  $\frac{d}{dt_s}\hat{\beta}(0) = d\mathbf{x}_0(\frac{d}{dt_s}\beta(0))$  é paralelo ao vetor  $\mathbf{v}$ . Como  $p$  é um ponto hiperbólico e  $\mathbf{v}$  uma direção assintótica, pela Observação 19 obtemos que os vetores  $\frac{d}{dt_c}\bar{\alpha}(0)$  e  $\frac{d}{dt_s}\hat{\beta}(0)$  são paralelos. Assim, existe  $l \in \mathbb{R}^*$  tal que  $\frac{d}{dt_s}\hat{\beta}(0) = d\mathbf{x}_0(\frac{d}{dt_s}\beta(0)) = l \frac{d}{dt_c}\bar{\alpha}(0) = d\mathbf{x}_0(l \frac{d}{dt_c}\alpha(0))$  e, como  $\mathbf{x}$  é uma imersão, concluímos que  $\frac{d}{dt_s}\beta(0) = l \frac{d}{dt_c}\alpha(0)$ . Portanto, as curvas  $\alpha(t_c)$  e  $\beta(t_s)$  são tangentes em  $(0, 0)$ . Denotaremos por  $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c)$  e  $\kappa_{sn}(t_s)$  as curvaturas de  $\hat{\alpha}(t_c)$  e  $\hat{\beta}(t_s)$ , respectivamente. Com essas notações, temos:

**Teorema 31** ([6]) *Se a projeção ortogonal  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade cúspide, então*

$$\lim_{(t_c, t_s) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c) \kappa_{sn}(t_s)}{l} \right| = \left| \frac{1}{l} \frac{\mu_{\hat{\alpha}}}{2\sqrt{\|\hat{\alpha}''(0)\|}} \frac{d\kappa_{sn}}{dt_s}(0) \right| = |K(0, 0)|.$$

**Demonstração:** Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $M$  está na forma de Monge  $z = f(x, y)$  e  $\mathbf{x}$  é dado por

$$\mathbf{x}(x, y) = \left( x, y, \frac{1}{2}(k_1^2 x^2 - k_2^2 y^2) + \sum_{m=3}^k c_m(x, y) + \mathcal{O}(x, y)^{k+1} \right), \quad (8)$$

onde  $k_1 > 0, k_2 > 0, c_m(x, y) = \sum_{j=0}^m \frac{a_{mj}}{(m-j)!j!} x^{m-j} y^j$  e  $\mathcal{O}(x, y)^{k+1}$  denota os termos de grau maior ou igual a  $k+1$  nas variáveis  $x$  e  $y$ .

Dessa forma, obtemos  $N(0, 0) = (0, 0, 1)$ ,  $K(0, 0) = -k_1^2 k_2^2 < 0$  e  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}(k_2, \varepsilon k_1, 0)$ , com  $\varepsilon = \pm 1$ , são as direções assintóticas.

Seja  $h(x, y) = \det[\mathbf{x}_x(x, y), \mathbf{x}_y(x, y), \mathbf{v}]$ . Pela Proposição 5, o conjunto singular de  $P_{\mathbf{v}}$  é dado por  $h^{-1}(0)$ . Como  $\mathbf{v} \in T_p M$  se, e somente se,  $\tilde{\mathbf{v}} = (k_2, \varepsilon k_1, 0) \in T_p M$ , o conjunto singular de  $P_{\mathbf{v}}$  também é dado por  $\tilde{h}^{-1}(0)$ , onde

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x, y) &= \det[\mathbf{x}_x(x, y), \mathbf{x}_y(x, y), \tilde{\mathbf{v}}] \\ &= -k_1^2 k_2 x + \varepsilon k_1 k_2^2 y - \left( \frac{a_{30}}{2} k_2 + \frac{a_{31}}{2} \varepsilon k_1 \right) x^2 - (a_{31} k_2 + a_{32} \varepsilon k_1) xy \\ &\quad - \left( \frac{a_{32}}{2} k_2 + \frac{a_{33}}{2} \varepsilon k_1 \right) y^2 + \mathcal{O}(x, y)^3. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial y}(0, 0) = \varepsilon k_1 k_2^2 \neq 0$ , pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança  $U$  de  $(0, 0)$  e uma função  $\phi : (-\delta, \delta) \rightarrow J$ , tal que os pontos  $(x, y) \in \tilde{h}^{-1}(0) \cap U$  podem ser escritos como  $(x, \phi(x))$  e, uma vez que  $\alpha(t_c) = \tilde{h}^{-1}(0)$ , então  $\alpha(t_c)$  pode ser parametrizada por  $\alpha(t_c) = (t_c, \phi(t_c))$ .

Como vamos trabalhar com curvaturas, iremos precisar apenas das derivadas de  $\hat{\alpha}$  e, assim, é suficiente determinar o  $k$ -jato de  $\alpha$  que, por simplicidade, também denotaremos por  $\alpha(t_c)$ . Temos  $\alpha(t_c) = (t_c, \phi'(0)t_c + \frac{1}{2}\phi''(0)t_c^2 + O(t_c^3))$ , onde  $O(t_c^3)$  denota os termos de grau maior ou igual a 3 na variável  $t_c$ .

Ainda pelo Teorema da Função Implícita, temos  $\phi'(t_c) = -\frac{\tilde{h}_x(t_c, \phi(t_c))}{\tilde{h}_y(t_c, \phi(t_c))}$ , de onde obtemos

$$\phi'(0) = \frac{k_1}{\varepsilon k_2}$$

e

$$\phi''(0) = \frac{a_{30}\varepsilon k_2^3 + 3a_{31}k_1 k_2^2 + 3a_{32}\varepsilon k_1^2 k_2 + a_{33}k_1^3}{k_1 k_2^4} = \frac{6\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^4}.$$

Logo,

$$\alpha(t_c) = \left( t_c, \frac{k_1}{\varepsilon k_2} t_c + \frac{3\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^4} t_c^2 + O(t_c^3) \right). \quad (9)$$

Como a projeção ortogonal de  $M$  na direção  $\mathbf{v}$  é dada por

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{v}}(x, y) &= (x, y, f(x, y)) - \langle (x, y, f(x, y)), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} \\ &= \left( x - \frac{k_2(k_2 x + \varepsilon k_1 y)}{k_1^2 + k_2^2}, y - \frac{\varepsilon k_1(k_2 x + \varepsilon k_1 y)}{k_1^2 + k_2^2}, f(x, y) \right), \end{aligned}$$

obtemos

$$\hat{\alpha}(t_c) = \left( \frac{-3c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3(k_1^2 + k_2^2)} t_c^2 + O(t_c^3), \frac{3\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^2(k_1^2 + k_2^2)} t_c^2 + O(t_c^3), \frac{-2c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3} t_c^3 + O(t_c^4) \right). \quad (10)$$

A curva  $\hat{\alpha}$  está contida em  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$  e  $\mathbf{v}$  é um vetor unitário ortogonal a  $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ . Assim  $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c) = \pm \frac{\det[\hat{\alpha}'(t_c), \hat{\alpha}''(t_c), \mathbf{v}]}{\|\hat{\alpha}'(t_c)\|^3}$ .  
Temos,

$$\hat{\alpha}'(t_c) = \left( \frac{-6c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3(k_1^2 + k_2^2)} t_c + O(t_c^2), \frac{6\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^2(k_1^2 + k_2^2)} t_c + O(t_c^2), \frac{-6c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3} t_c^2 + O(t_c^3) \right),$$

e

$$\hat{\alpha}''(t_c) = \left( \frac{-6c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3(k_1^2 + k_2^2)} + O(t_c), \frac{6\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^2(k_1^2 + k_2^2)} + O(t_c), \frac{-12c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3} t_c + O(t_c^2) \right),$$

logo

$$\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c) = \pm \frac{-\varepsilon k_1^2 k_2^3 (k_1^2 + k_2^2) (t_c^2 + O(t_c^3))}{6|c_3(k_2, \varepsilon k_1)| (t_c^2 + O(t_c^3))^{\frac{3}{2}}}.$$

A seção normal de  $M$  na direção  $\mathbf{v}$  é a imagem por  $\mathbf{x}$  da curva  $\beta(t_s)$ , obtida como conjunto de zeros da função  $g(x, y) = \det[\mathbf{x}(x, y), \tilde{\mathbf{v}}, N(\mathbf{0})] = \varepsilon k_1 x - k_2 y$ .

Como  $\beta(t_s) = g^{-1}(0)$  e  $\beta'(0) = l\alpha'(0) = \left(l, l\frac{\varepsilon k_1}{k_2}\right)$ , então  $\beta(t_s) = \left(lt_s, l\frac{\varepsilon k_1}{k_2}t_s\right)$ . Assim,

$$\hat{\beta}(t_s) = \mathbf{x} \circ \beta(t_s) = \left(lt_s, l\frac{\varepsilon k_1}{k_2}t_s, \frac{c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3}l^3 t_s^3 + O(t_s^4)\right).$$

A curva  $\hat{\beta}(t_s)$  está contida no plano gerado pelos vetores  $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}(k_2, \varepsilon k_1, 0)$  e  $N(\mathbf{0}) = (0, 0, 1)$ , que tem  $\mathbf{v} \times N(\mathbf{0}) = \left(\frac{\varepsilon k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, \frac{-k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, 0\right)$  como vetor normal unitário. Logo,

$$\kappa_{sn}(t_s) = \pm \frac{\det[\hat{\beta}'(t_s), \hat{\beta}''(t_s), \mathbf{v} \times N(\mathbf{0})]}{\|\hat{\beta}'(t_s)\|^3} = \pm \frac{6c_3(k_2, \varepsilon k_1)lt_s + O(t_s^2)}{k_2(k_1^2 + k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2 + k_2^2 + O(t_s^4))^{\frac{3}{2}}}.$$

Como  $\frac{d\alpha}{dt_c}(0) = \frac{1}{l} \frac{d\beta}{dt_s}(0)$ , então  $t_s = \pm t_c + O(t_c^2)$ . Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t_c \rightarrow 0 \\ t_s \rightarrow 0}} \left| \frac{\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c)\kappa_{sn}(t_s)}{l} \right| &= \lim_{\substack{t_c \rightarrow 0 \\ t_s \rightarrow 0}} \left| \frac{\frac{-\varepsilon k_1^2 k_2^3 (k_1^2 + k_2^2)(t_c^2 + O(t_c^3))}{6|c_3(k_2, \varepsilon k_1)|(t_c^2 + O(t_c^3))^{\frac{3}{2}}} \frac{6c_3(k_2, \varepsilon k_1)lt_s + O(t_s^2)}{k_2(k_1^2 + k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2 + k_2^2 + O(t_s^4))^{\frac{3}{2}}}}{l} \right| \\ &= \lim_{t_c \rightarrow 0} \left| k_1^2 k_2^2 \frac{(k_1^2 + k_2^2)(t_c^2 + O(t_c^3))}{(t_c^2 + O(t_c^3))^{\frac{3}{2}}} \frac{\pm t_c + O(t_c^2)}{(k_1^2 + k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2 + k_2^2 + O(t_c^4))^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= \lim_{t_c \rightarrow 0} \left| k_1^2 k_2^2 \frac{(k_1^2 + k_2^2)(t_c^3 + O(t_c^4))}{(t_c^2 + O(t_c^3))^{\frac{3}{2}}(k_1^2 + k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2 + k_2^2 + O(t_c^4))^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= \lim_{t_c \rightarrow 0} \left| k_1^2 k_2^2 \frac{(k_1^2 + k_2^2)t_c^3(1 + O(t_c))}{t_c^3(1 + O(t_c))^{\frac{3}{2}}(k_1^2 + k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2 + k_2^2 + O(t_c^4))^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= |k_1^2 k_2^2| = |K(0, 0)|. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando a Proposição 30 e o fato que  $t_s = \pm t_c + O(t_c^2)$ , obtemos:

$$\lim_{\substack{t_c \rightarrow 0 \\ t_s \rightarrow 0}} \left| \frac{\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c)\kappa_{sn}(t_s)}{l} \right| = \lim_{\substack{t_c \rightarrow 0 \\ t_s \rightarrow 0}} \left| \frac{1}{l} t_c \kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c) \frac{\kappa_{sn}(t_s)}{t_s} \frac{t_s}{t_c} \right| = \left| \frac{1}{l} \frac{\mu_{\hat{\alpha}}}{2\sqrt{\|d^2\hat{\alpha}/dt_c^2(0)\|}} \frac{d\kappa_{sn}}{dt_s}(0) \right|,$$

o que finaliza a demonstração.  $\square$

**Exemplo 32** Seja  $M$  a superfície dada por  $z = f(x, y)$ , onde  $f(x, y) = xy + y^3$ , parametrizada por  $\mathbf{x}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ . Observamos primeiramente que como  $a_{21} \neq 0$ ,  $a_{33} \neq 0$  e  $a_{22} = 0$  segue, pelo Teorema 12, que  $P_{\mathbf{v}}$  é uma singularidade cúspide em  $\mathbf{0}$ . Logo, o contorno aparente na direção  $\mathbf{v}$  é uma (2,3)-cúspide.

A curva  $\alpha(t_c)$  é dada como conjunto de zeros da função  $h(x, y) = \det[\mathbf{x}_x(x, y), \mathbf{x}_y(x, y), \mathbf{v}] = -x - 3y^2$ . Logo,  $\alpha(t_c) = (-3t_c^2, t_c)$ . Como a projeção ortogonal da direção  $\mathbf{v}$  é dada por  $P_{\mathbf{v}}(x, y) = (x, 0, f(x, y))$ , obtemos que  $\hat{\alpha}(t_c) = P_{\mathbf{v}} \circ \alpha(t_c) = (-3t_c^2, 0, -2t_c^3)$ .

A curva  $\beta(t_s)$  é obtida como conjunto de zeros da função  $g(x, y) = \det[\mathbf{x}(x, y), \mathbf{v}, N(\mathbf{0})] = x$ . Logo,  $\beta(t_s) = (0, t_s)$  e a seção normal na direção  $\mathbf{v}$  é dada por  $\hat{\beta}(t_s) = \mathbf{x} \circ \beta(t_s) = (0, t_s, t_s^3)$ .

A curvatura de  $\hat{\beta}(t_s)$  é dada por

$$\kappa_{sn}(t_s) = \pm \frac{\det[\hat{\beta}'(t_s), \hat{\beta}''(t_s), (1, 0, 0)]}{\|\hat{\beta}'(t_s)\|^3} = \pm \frac{6t_s}{(1 + 9t_s^4)^{\frac{3}{2}}},$$

de onde segue que  $\frac{d\kappa_{sn}}{dt_s}(0) = \pm 6$ . Como  $\frac{d\alpha}{dt_c}(0) = \frac{d\beta}{dt_s}(0) = (0, 1)$ , então  $l = 1$ .

A curvatura cuspidal de  $\hat{\alpha}$  é, em valor absoluto, dada por  $\mu_{\hat{\alpha}}(0) = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . Logo, pelo Teorema 31, obtemos que

$$|K(0, 0)| = \left| \frac{1}{l} \frac{\mu_{\hat{\alpha}}}{2\sqrt{\|d^2\hat{\alpha}/dt_c^2(0)\|}} \frac{d\kappa_{sn}}{dt_s}(0) \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{6}} 6 \right| = 1,$$

Portanto,  $K(0, 0) = -1$ .

A figura a seguir apresenta o traço de  $M$  e as curvas deste exemplo. □

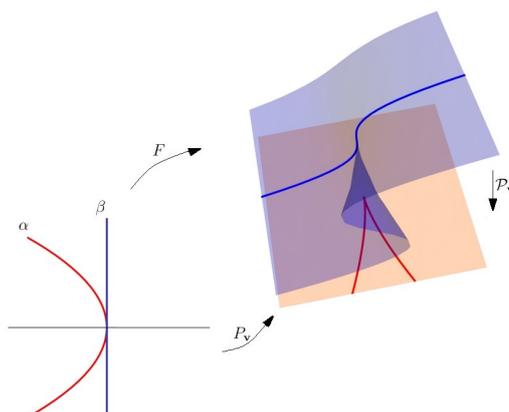
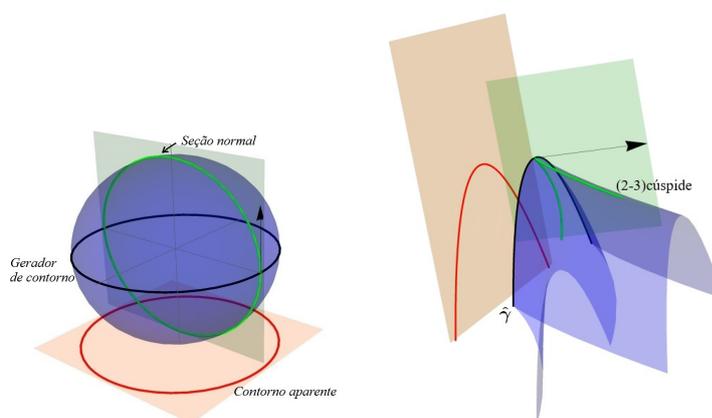


Figura 8 - Superfície  $M$  e as curvas dadas no Exemplo 32.

## 6 Superfícies singulares

Até o momento nosso estudo foi voltado para superfícies regulares. Quando estamos interessados em estudar superfícies singulares, é inevitável nos deparar com um tipo muito especial, as frentes de onda, uma vez que são exemplos de superfícies singulares que apresentam naturalmente um campo de vetores normais bem definidos, inclusive nos pontos singulares. Em [9], é mostrado que, se  $M$  é uma superfície imagem de uma frente de onda, então, genericamente, a curvatura Gaussiana  $K$  é não limitada, mas a forma curvatura Gaussiana  $Kd\hat{A}$  é limitada (Definição 36) e introduziram a função curvatura singular no conjunto singular de cuspidal edges, que são particulares frentes de onda. Mais especificamente, uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $U$  é um aberto em  $\mathbb{R}^2$ , é chamada de **cuspidal edge** em  $q \in U$  se o germe de aplicação  $f$  em  $q$  é  $\mathcal{A}$ -equivalente a  $(x, y^2, y^3)$  em  $(0, 0)$ , que chamamos de *cuspidal edge usual* e tem imagem dada na Figura 10. É demonstrado em [10] uma versão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges, apresentando uma fórmula que

relaciona a forma curvatura Gaussiana em um ponto singular da superfície com as curvaturas de três curvas, uma delas obtida como imagem da projeção ortogonal de uma curva da superfície em uma determinada direção e outra sendo uma (2,3)-cúspide obtida pela interseção de  $M = f(U)$  com um plano (Ver Figura 9).



**Figura 9** - Curvas envolvidas no Teorema de Koenderink para superfície regular e na versão para cuspidal edges.

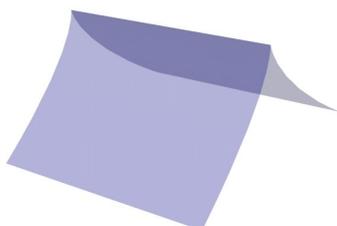
O objetivo desta seção é apresentar a versão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges dada em [10]. Para isto, veremos brevemente alguns conceitos relacionados a frentes de onda. No que segue,  $U$  denotará um aberto em  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 33** Uma aplicação suave  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada de **frontal** se existe um campo unitário suave  $\nu : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais à  $f$ , isto é,  $\|\nu(q)\| = 1$  e  $\langle df_q(X), \nu(q) \rangle = 0$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^2$  e  $q \in U$ . Se além disso  $(f, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  for uma imersão, dizemos que  $f$  é uma **frente de onda** (ou simplesmente frente) e  $\nu$  é a **aplicação de Gauss** de  $f$ .

Toda parametrização de superfícies regulares é uma frente de onda, basta tomar  $\nu$  como sendo a aplicação normal de Gauss da parametrização.

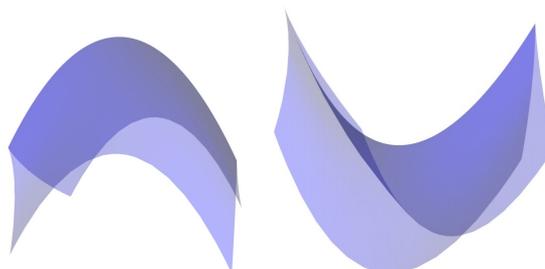
Dada uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  denotaremos seu conjunto singular por  $\Sigma_f$ , ou seja,  $\Sigma_f = \{q \in U \mid \text{rank } df_q < 2\}$ .

**Exemplo 34** A cuspidal edge usual  $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$  é uma frente de onda. De fato, basta tomar  $\nu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4+9y^2}}(0, -3y, 2)$ .



**Figura 10** - Cuspidal edge usual dada no Exemplo 34.

**Exemplo 35** A aplicação  $f(x, y) = (ax^2 + y^2, by^2 + y^3, x)$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , é uma *cuspidal edge* e  $\nu(x, y) = \frac{1}{\delta(x, y)}(-3y - 2b, 2, 2ax(3y + 2b))$ , onde  $\delta(x, y) = \sqrt{4 + (1 + 4a^2x^2)(4b^2 + 12by + 9y^2)}$  é a aplicação de Gauss de  $f$ . A Figura 11 apresenta o traço de  $f$  para  $a = b = 1$  à esquerda, e para  $a = 1$  e  $b = -1$  à direita.  $\square$



**Figura 11** - Cuspidal edges dadas no Exemplo 35.

Cuspidal edges, juntamente com rabos de andorinha, que são aplicações com germes  $\mathcal{A}$ -equivalentes a  $(3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y)$ , são singularidades genéricas de frentes de onda em  $\mathbb{R}^3$ .

No que segue  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  será uma frente, com  $f(U) = M$  e  $\nu$  a aplicação de Gauss de  $f$ .

A função  $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\lambda(q) = \langle f_x(q) \times f_y(q), \nu(q) \rangle = \det(f_x, f_y, \nu)(q)$$

é chamada **função densidade de área** de  $f$ . Como  $\lambda(q) = 0 \Leftrightarrow f_u(q) \times f_v(q) = \mathbf{0} \Leftrightarrow q \in \Sigma_f$ , então  $\Sigma_f = \lambda^{-1}(0)$ . Além disso,  $\lambda(q) > 0$  quando  $f_u(q) \times f_v(q)$  e  $\nu(q)$  apontam para o mesmo semiespaço de  $\mathbb{R}^3$  determinado por  $T_{f(q)}M$ , e  $\lambda(q) < 0$  quando  $f_u(q) \times f_v(q)$  e  $\nu(q)$  apontam para semiespaços opostos de  $T_{f(q)}M$ , onde  $T_{f(q)}M$  é o plano tangente usual à  $M$  em  $f(q)$ , que é ortogonal à  $\nu(q)$ . Denotaremos por  $U_+$  (resp.  $U_-$ ) o aberto de  $\mathbb{R}^2$  formado pelos pontos  $(x, y)$  tais que  $\lambda(x, y) > 0$  (resp.  $\lambda(x, y) < 0$ ).

Dizemos que  $q \in \Sigma_f$  é um **ponto singular não degenerado** de  $f$  se  $q$  é um ponto regular de  $\lambda$ , ou seja, se  $\lambda_u(q)$  e  $\lambda_v(q)$  não se anulam simultaneamente. Como  $\Sigma_f = \lambda^{-1}(0)$  segue, pelo Teorema da Função Implícita, que  $\Sigma_f$  é localmente uma curva regular nos pontos singulares não degenerados de  $f$ , a qual chamaremos de **curva singular** de  $f$ .

A partir de agora, dado um ponto singular não degenerado  $q$  de  $f$ , denotaremos por  $\gamma : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  ( $\varepsilon > 0$ ) uma parametrização para a curva singular, com  $\gamma(0) = q$  e vamos tomar  $\varepsilon$  tal que  $\gamma(t)$  é um ponto singular não degenerado para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Se  $q \in \Sigma_f$  é não degenerado então  $f$  tem posto 1 em  $q$ , ou seja, sua diferencial  $df_q$  é uma aplicação linear de posto 1 e, assim, o núcleo de  $df_q$  tem dimensão 1. A direção de  $\mathbb{R}^2$  dada por este núcleo é chamada de **direção nula**. Podemos escolher um campo suave de vetores  $\eta(t)$  ao longo de  $\gamma$  tal que  $\eta(t)$  pertence a direção nula para todo  $t$ , ou seja,  $df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = \mathbf{0}$ , chamado de **campo anulador de vetores ao longo de  $\gamma$** . A **reta tangente** à  $M$  em  $f(q)$ , denotada por  $T_{f(q)}M$ , é definida como sendo a reta que passa por  $f(q)$  e é paralela a reta  $df_q(\mathbb{R}^2)$ . O **plano normal** à  $M$  em  $f(q)$ , denotado por  $N_{f(q)}M$ , é definido como sendo o plano perpendicular à  $df_q(\mathbb{R}^2)$  passando por  $f(q)$ .

Vamos supor que a curva singular é composta de cuspidal edges e vamos escolher o campo anulador de vetores ao longo de  $\gamma$ ,  $\eta(t)$ , tal que  $\{\gamma'(t), \eta(t)\}$  é uma base positivamente orientada para  $\mathbb{R}^2$  ao longo de  $\gamma$ . Denotaremos, quando não houver perigo de confusão e com abuso de

notação,  $\nu \circ \gamma(t)$  apenas por  $\nu(t)$ . A **curvatura singular** ao longo de  $\gamma$  é definida por

$$\kappa_s(t) = \text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) \frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \nu(t))}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3},$$

onde  $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ .

Genericamente a curvatura Gaussiana é não limitada para cuspidal edges. Este fato motiva a definição da 2-forma curvatura Gaussiana que apresentaremos abaixo, uma vez que esta é limitada e pode ser continuamente estendida em todo ponto de  $U$ .

**Definição 36** A 2-forma  $d\hat{A} = \lambda(x, y)dx \wedge dy$  é chamada de **forma de área com sinal**.

**Teorema 37** ([9]) *Sejam  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma frente e  $K$  a curvatura Gaussiana de  $f$  definida nos pontos regulares. Então,  $Kd\hat{A}$  pode ser continuamente estendida como uma 2-forma definida globalmente em  $U$ .*

Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $I$  é um aberto em  $\mathbb{R}$ , é chamada de **frente de onda** (ou frente) se existe um campo unitário suave  $\nu_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de vetores normais à  $\gamma$ , ou seja,  $\langle \gamma'(t), \nu_\gamma(t) \rangle = 0$ , e tal que  $(\gamma, \nu_\gamma) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  é uma imersão. Claramente toda curva plana regular é uma frente. A (2,3)-cúspide  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$  é uma frente com o campo  $\nu_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}(-3t, 2)$ .

De maneira análoga ao Teorema 37 é possível mostrar que se  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma frente e  $\kappa_\gamma$  sua curvatura definida nos pontos regulares, então  $\kappa_\gamma ds$  pode ser continuamente estendida como uma 1-forma definida globalmente em  $I$ , onde  $ds = \|\gamma'(t)\| dt$ .

Antes de enunciar a versão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges fixemos algumas notações.

No que segue,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma cuspidal edge,  $q \in U$ ,  $M = f(U)$ ,  $\nu$  a aplicação de Gauss de  $f$ ,  $\gamma$  a curva singular com  $\gamma(0) = q$ ,  $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ ,  $\xi_q = \nu(q) \times \frac{\hat{\gamma}'(0)}{\|\hat{\gamma}'(0)\|}$  e  $\mathbf{v}_\theta = \cos \theta \xi_q + \sin \theta \nu(q)$ , para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ , um vetor em  $N_{f(q)}M$ . Consideremos  $\mathcal{P}_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_\theta \mathbb{S}^2$  a projeção ortogonal na direção  $\mathbf{v}_\theta$  dada por  $\mathcal{P}(X) = X - \langle X, \mathbf{v}_\theta \rangle \mathbf{v}_\theta$ .

Seja  $\gamma_1$  a projeção ortogonal de  $\hat{\gamma}$  na direção  $\mathbf{v}_\theta$ , ou seja,  $\gamma_1(t) = \mathcal{P}_\theta \circ \hat{\gamma}(t) = \hat{\gamma}(t) - \langle \hat{\gamma}(t), \mathbf{v}_\theta \rangle \mathbf{v}_\theta$ . Assim,  $\gamma_1'(t) = \hat{\gamma}'(t) - \langle \hat{\gamma}'(t), \mathbf{v}_\theta \rangle \mathbf{v}_\theta$  e  $\gamma_1'(0) = \hat{\gamma}'(0) \neq \mathbf{0}$ , ou seja,  $\gamma_1$  é uma curva regular em uma vizinhança de  $t = 0$ . Denotemos por  $\kappa_1$  a curvatura de  $\gamma_1$ .

Denotemos por  $\gamma_2$  a curva obtida pela interseção de  $M$  com  $N_{f(q)}M$ . É provado em [11] que essa curva é uma (2,3)-cúspide em  $f(q)$ . Como  $\gamma_2$  é uma frente, denotando por  $\kappa_2$  sua curvatura nos pontos regulares, então  $\kappa_2 ds$  está definida em todo domínio de  $\gamma_2$ .

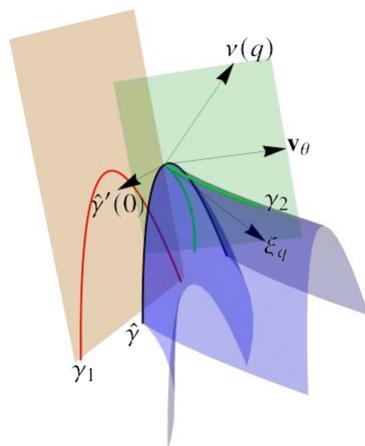
A Figura 12 apresenta os traços das curvas  $\hat{\gamma}$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e os vetores definidos acima.

Finalmente, enunciamos a seguir a versão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges. Não apresentaremos a demonstração deste teorema, mas damos dois exemplos em que aplicamos seu resultado.

**Teorema 38** ([10]) *Se  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , então*

$$Kd\hat{A} = \frac{1}{\cos \theta} (\sin \theta \kappa_s - \kappa_1) dt \wedge \kappa_2 ds$$

em  $q$ , onde  $\kappa_s$  é a curvatura singular ao longo de  $\gamma$ . A curva  $\gamma_2$  é orientada de tal forma que  $\gamma_2$  passa de  $U_-$  para  $U_+$ ,  $T_\theta \mathbb{S}^2$  é orientado tal que  $\{-\sin \theta \xi_q + \cos \theta \nu(q), \gamma_1'(0)\}$  é uma base positiva, e  $N_{f(q)}M$  é tal que  $\{\xi_q, \nu(q)\}$  forma uma base positiva.



**Figura 12** - Cuspidal edge e as curvas e vetores definidos acima. O plano verde é o plano  $N_{f(q)}M$ .

**Exemplo 39** Seja  $f(x, y) = (ax^2 + y^2, by^2 + y^3, x)$  e sua aplicação de Gauss dada por  $v(x, y) = \frac{1}{\delta(x, y)}(-3y - 2b, 2, 2ax(3y + 2b))$ , com  $\delta(x, y) = \sqrt{4 + (1 + 4a^2x^2)(4b^2 + 12by + 9y^2)}$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ . A curva singular de  $f$  coincide com o eixo- $x$ . Assim, podemos parametrizá-la por  $\gamma(x) = (x, 0)$ , obtendo  $\hat{\gamma}(x) = (ax^2, 0, x)$ . O traço de  $f$  e das curvas dadas nesse exemplo estão esboçados na Figura 12.

Tomando  $q = (0, 0)$  obtemos  $\xi_q = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(1, b, 0)$  e, para  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , obtemos  $\mathbf{v}_{\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+b^2}}(1 - b, 1 + b, 0)$ . Denotando  $-\sin \theta \xi_q + \cos \theta v(q)$  por  $\mathbf{v}_{\theta}^{\perp}$ , obtemos  $\mathbf{v}_{\theta}^{\perp} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+b^2}}(-1 - b, 1 - b, 0)$ . A projeção ortogonal na direção  $\mathbf{v}_{\theta}$  é dada por

$$\mathcal{P}_{\theta}(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{1}{2(1+b^2)}((1-b)^2x + (1-b^2)y, (1-b^2)x + (b+1)^2y, 0).$$

Logo,

$$\gamma_1(x) = \mathcal{P}_{\theta}(\hat{\gamma}(x)) = \mathcal{P}_{\theta}(ax^2, 0, x) = (ax^2, 0, x) - \frac{1}{2(1+b^2)}(ax^2(1-b)^2, ax^2(1-b^2), 0),$$

de onde segue que

$$\gamma_1'(x) = (2ax, 0, 1) - \frac{1}{2(1+b^2)}(2ax(1-b)^2, 2ax(1-b^2), 0) \Rightarrow \gamma_1'(0) = (0, 0, 1).$$

A curva  $\gamma_1$  está contida em  $T_{\theta}\mathbb{S}^2$ , que tem  $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{v}_{\theta}^{\perp}, \gamma_1'(0)\}$  como uma base ortonormal positiva. Escrevendo  $\gamma_1''(0) = \tilde{a}\mathbf{v}_{\theta}^{\perp} + \tilde{b}\gamma_1'(0)$ , obtemos  $\tilde{a} = \langle \gamma_1''(0), \mathbf{v}_{\theta}^{\perp} \rangle$  e  $\tilde{b} = \langle \gamma_1''(0), \gamma_1'(0) \rangle$ . Como  $\gamma_1''(0) = \frac{1}{1+b^2}(2a(1+b^2) - a(1-b)^2, -a(1-b^2), 0)$ , obtemos  $\gamma_1''(0) = -\frac{\sqrt{2}a(1+b)}{\sqrt{1+b^2}}\mathbf{v}_{\theta}^{\perp}$ .

Assim,

$$\kappa_1(0) = \frac{\det[\gamma_1'(0), \gamma_2'(0)]_{\mathfrak{B}_1}}{\|\gamma_1'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{2}a(1+b)}{\sqrt{1+b^2}}. \quad (11)$$

Para encontrar a curva  $\gamma_2$ , notemos que  $f_x(q) = (0, 0, 1)$  é um vetor ortogonal à  $N_{f(q)}M$  e, então,  $\text{Im}(\gamma_2) = \{f(x, y) \mid \langle f_x(q), f(x, y) \rangle = 0\} = \{f(x, y) \mid x = 0\}$ . Logo,  $\gamma_2(y) = (y^2, by^2 + y^3, 0)$

e, uma vez que  $\mathfrak{B}_2 = \{\xi_q, \nu(q)\}$  é uma base positiva para  $N_{f(q)}M$ , obtemos  $\gamma'_2(y) = \frac{y(2+2b^2+3by)}{\sqrt{1+b^2}}\xi_q + \frac{3y^2}{\sqrt{1+b^2}}\nu(q)$  e  $\gamma''_2(y) = \frac{2(1+b^2+3by)}{\sqrt{1+b^2}}\xi_q + \frac{6y}{\sqrt{1+b^2}}\nu(q)$ . Assim,  $\kappa_2 ds = \frac{\det[\gamma'_2, \gamma''_2]_{\mathfrak{B}_2}}{\|\gamma'_2\|^2} dy = \frac{6}{4+4b^2+12by+9y^2} dy$  e, em  $y = 0$ , obtemos  $\kappa_2 ds = \frac{3}{2+2b^2} dy$ .

A curvatura singular ao longo de  $\gamma$  em  $u = 0$  é dada por  $\kappa_s(0) = \frac{2a}{\sqrt{1+b^2}}$ . Logo, em  $q = (0, 0)$ , obtemos

$$\begin{aligned} Kd\hat{A} &= \frac{1}{\cos\theta}(\text{sen}\theta\kappa_s - \kappa_1)dt \wedge \kappa_2 ds = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2a}{\sqrt{1+b^2}} - \frac{\sqrt{2}a(1+b)}{\sqrt{1+b^2}} \right) \frac{3}{2+2b^2} dx \wedge dy \\ &= -\frac{3ab}{(1+b^2)^{\frac{3}{2}}} dx \wedge dy. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 40** Seja  $M$  a cuspidal edge parametrizada por  $f(x, y) = (x, y^2, y^3)$  e sua aplicação de Gauss  $\nu(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4+9y^2}}(0, -3y, 2)$ . Como a curva singular de  $f$  está contida no eixo- $x$ , podemos parametrizá-la por  $\gamma(x) = (x, 0)$ . Logo,  $\hat{\gamma}(x) = f(x, 0) = (x, 0, 0)$  é uma reta. Para qualquer  $\theta \in \mathbb{R}$ , a curva  $\gamma_1$  obtida pela projeção ortogonal de  $\hat{\gamma}$  na direção  $\mathbf{v}_\theta = (0, \cos\theta, \sin\theta)$  é uma reta e, portanto,  $\kappa_1(x) = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  e, como  $\kappa_s(x) = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ , obtemos  $Kd\hat{A} = \frac{1}{\cos\theta}(\text{sen}\theta\kappa_s - \kappa_1)dt \wedge \kappa_2 ds = 0$  em todo ponto  $q \in U$ . □

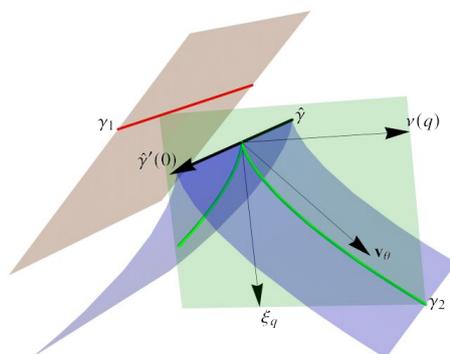


Figura 13 - Cuspidal edge dada no Exemplo 40.

## 7 Referências bibliográficas

1 IZUMIYA, S. *et al.* **Differential geometry from a singularity theory viewpoint**. 1. ed. Singapura: World Scientific, 2016.

2 RIEGER, J. H. Families of maps from the plane to the plane. **Journal of the London Mathematical Society**, v. 2-36, n. 2, p. 351–369, 1987.



- 3 CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- 4 CIPOLLA, R.; GIBLIN, P. **Visual motion of curves and surfaces**. New York: Cambridge University Press, 2000.
- 5 KOENDERINK, J. J. What does the occluding contour tell us about solid shape? **Perception**, v. 13, n. 3, p. 321-330, 1984.
- 6 FUKUI, T.; HASEGAWA, M.; SAJI, K. Extensions of Koenderink's formula. **Journal of Gökova Geometry Topology**, v. 10, p. 42-59, 2016.
- 7 BRUCE, J. W.; GAFFNEY, T. J. Simple singularities of mappings  $\mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ . **Journal of the London Mathematical Society**. v.2-26, n. 3, p. 465-474, 1982.
- 8 SHIBA, S.; UMEHARA, M. The behavior of curvature functions at cusps and inflection points. **Differential Geometry and its Applications**, v. 30, n. 3, p. 285-299, 2012.
- 9 SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. **Annals of Mathematics**, v. 169, n. 2, p. 491-529, 2009.
- 10 SAJI, K. Koenderink type theorems for fronts. **Journal of Singularities**, v. 10, p. 264-270, 2014.
- 11 MARTINS, L. F.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts. *In*: FUTAKI, A.; MIYAOKA, R.; TANG, Z.; ZHANG, W. (ed.). **Geometry and topology of manifolds**. Tokyo: Springer, 2016, p. 247-281. (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, v. 154).