Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 7, dez. 2016
Edição ERMAC

Método de pontos interiores e de programação inteira 0-1 em problemas de produtividade associados ao plantio e colheita de cana-de-açúcar

Interior point and binary integer programming method in productivity problems associated with planting and harvesting of sugarcane

Amanda Suellen Caversan
PGEE-FEB-UNESP- Bauru
amandasc.unesp@gmail.com

Maria Laura Parra Spagnuolo de Souza
PGEE-FEB-UNESP- Bauru
marialaura.parra92@gmail.com

Antonio Roberto Balbo
D.MAT.-FC-UNESP-Bauru
arbalbo@fc.unesp.br

Sônia Cristina Poltroniere
D.MAT.-FC-UNESP - Bauru
soniacps@fc.unesp.br

Helenice de Oliveira Florentino
IBB-UNESP - Botucatu
helenice@ibb.unesp.br

Resumo

A cana-de-açúcar é uma importante matéria-prima para o setor sucroenergético brasileiro por possibilitar a produção de sacarose, bem como poder ser utilizada à produção de energia aproveitável associada ao etanol. Por outro lado, os processos envolvidos na área sucroenergética são de extrema complexidade e necessitam de auxílios matemático e computacional para sua investigação e aplicação. Neste contexto, este trabalho visa a investigação de uma metodologia que envolve métodos primal-dual de pontos interiores e de programação inteira 0-1, os quais foram explorados para a resolução de um modelo matemático que auxilia o planejamento otimizado do plantio e colheita da cana-de-açúcar. Este modelo foi proposto com o objetivo de maximizar a produção de açúcar e/ou etanol de uma usina, sujeito às restrições técnicas desta. Para validação do modelo e da metodologia foi proposta uma aplicação destes para o planejamento do plantio e colheita da cana em uma área real de uma usina localizada na região Sudeste do Brasil.

Palavras-chave: Métodos de pontos interiores, Programação inteira 0-1, Cana-de-açúcar. Etanol. Produtividade.

Abstract

The sugarcane is an important raw material for the Brazilian sugarcane industry by enabling the production of sucrose and sugar, as well as be used to the energy production related to the ethanol. In other way, the processes involved in the sugarcane industry are of complexity extreme and require mathematical and computational supports to the their investigation and application. The aim of this work is investigate a methodology that involves the primal-dual interior point and binary integer programming methods, which were exploited to the resolution of a mathematical model that helps in the optimized planning related to the sugarcane planting and harvesting. This model was proposed with the objective of maximizing the production of sugar and/or ethanol of a mill, subject to technical constraints of this. To validate this model and methodology was proposed an application of these to the planning of sugarcane planting and harvesting, considering a real area of a mill located in the southeastern region of Brazil.

Keywords: Interior point methods, Binary integer programming, sugarcane, ethanol, productivity.

1 Introdução

Segundo a União das Indústria de Cana-de-açúcar (UNICA), o Brasil é o maior produtor mundial de cana-de-açúcar. É esperada uma produção de 690,98 milhões de toneladas de cana-de-açúcar para a safra de 2016/17, crescimento estimado em 3,8% em relação à safra anterior, sendo que a área destinada ao cultivo da cana-de açúcar foi de 9.073,7 mil hectares, 4,8% de aumento, se comparada com a safra 2015/16 (dados da Conab – Companhia Nacional de Abastecimento).

Com a expansão da produção canavieira, surgiram novos desafios como a procura pelo melhor planejamento do plantio e da colheita. Segundo Ramos (2014), uma das etapas de maior importância do ciclo é o plantio, pois, se bem planejado, acarreta uma série de benefícios ao longo do ciclo da cultura como, por exemplo, o melhor aproveitamento da área, a redução dos custos, o aumento na produtividade, entre outros. De acordo com esse autor, além do plantio, outro momento importante é a colheita da cana-de-açúcar, que deve ser realizada quando a variedade plantada atingir sua máxima produtividade ou em período próximo a este, para que, assim, a usina tenha como resultado uma maior produtividade de fibra e sacarose gerada. E otimizar o planejamento do plantio e da colheita envolve vários fatores tais como, o tipo de variedade a ser plantada, o melhor período para a variedade escolhida ser plantada e o seu tempo de maturação. Para a indústria canavieira, a maturação da cana-de-açúcar se dá quando ela atinge o teor mínimo de sacarose, cerca de 13% do peso do colmo (ROSSETTO, 2008).

Segundo Silveira; Barbosa e Oliveira (2002), as variedades devem apresentar características desejáveis, como alta produtividade, alto teor de açúcar, rebrota, ausência de tombamento, resistência a pragas e doenças. Além disso, é muito importante escolher a melhor época para o plantio da variedade de cana-de-açúcar de acordo com o seu tipo.

A cana-de-açúcar pode ser classificada de acordo com seu tempo de crescimento e maturação. As variedades conhecidas como cana de ano são aquelas plantadas entre os meses de janeiro a março e colhida após um período de 10 a 14 meses. As variedades conhecidas como cana de ano e meio são aquelas plantadas nos meses de setembro e outubro e colhidas de 16 a 20 meses depois de seu plantio.

Diante da complexidade envolvida no processo de planejamento do plantio e da colheita da cana-de-açúcar, estudos têm sido desenvolvidos propondo métodos e modelos matemáticos que otimizem tal planejamento, objetivando a maximização da produtividade das variedades e da produção de sacarose e fibra da usina. Florentino (2006), Lima, A. D. (2009) e Lima, C. (2013) desenvolveram trabalhos relacionados à produção de energia através da biomassa da cana-de-açúcar. Dando continuidade a esses trabalhos em Ramos (2014), são propostos modelos matemáticos para considerar a escolha de variedades de cana-de-açúcar que buscam otimizar a produtividade de sacarose e fibra no momento da colheita, o qual é explorado neste trabalho com pequenas modificações.

Assim, neste trabalho é proposto um modelo matemático de programação inteira 0-1 que visa determinar um planejamento otimizado do plantio e da colheita da cana-de-açúcar, de forma a obter a máxima produtividade em sacarose das variedades e a máxima produção da usina considerando restrições técnicas desta. Como metodologia de solução, é utilizado um procedimento híbrido envolvendo os métodos primal-dual de pontos interiores e o *branch-and-bound*, o qual é convalidado em relação ao modelo matemático quando aplicado a um problema real de uma usina da região Sudeste do Brasil.

O trabalho é desenvolvido de acordo com o que segue na seção 2, em que é apresentado o modelo matemático de maximização de produtividade utilizado. Na seção 3 é discutido o método híbrido previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* (PDBB)

utilizado para resolução do modelo. Em seguida, na seção 4, são mostrados os resultados numéricos encontrados para o melhor planejamento do plantio da cana-de-açúcar; primeiro é apresentado o resultado para a escolha da variedade a ser plantada em determinado talhão, logo depois o resultado obtido para a escolha do período em que a variedade escolhida será plantada a fim de atingir a máxima produtividade. Na seção 5 são feitas as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, seguido pela apresentação das referências utilizadas para a realização deste trabalho, seção 6.

2 Modelo de maximização da produtividade

Para a definição do modelo proposto neste trabalho, de maximização da produção da cana-de-açúcar, que considera a produtividade por hectare desta, o qual é apresentado através das equações e inequações (1)-(12), serão utilizados os índices, os valores dados, as variáveis e os conjuntos relativos ao plantio e à colheita destas variedades, listados a seguir.

São considerados os seguintes índices:
i – é o índice associado às variedades de cana-de-açúcar;
j – é o índice associado aos talhões em que as variedades são plantadas,
t – é o índice associado aos períodos de colheita e é considerado em meses;
$\bar{t}$ – é o índice associado ao mês de plantio da cana-de-açúcar.

Os valores dados para a definição do modelo são:
k – é o número de talhões em que a cana-de-açúcar poderá ser plantada;
n é o número de variedades de cana-de-açúcar a serem plantadas.
A_{ijt} – é a variável que representa a produtividade de sacarose em toneladas/hectares da variedade i no talhão j colhida no mês t;
F_{ijt} – representa a quantidade de fibra estimada para a variedade i plantada no talhão j no mês de corte t;
D – representa a demanda de açúcar em tonelada a ser produzida pela usina no primeiro ano;
FI – representa o limitante inferior estabelecido para a fibra;
FS – representa o limitante superior estabelecido para a fibra;
MI – representa a capacidade mínima da indústria para a moagem da cana-de-açúcar;
MS – representa a capacidade mínima e máxima da indústria para a moagem da cana-de-açúcar;
Lj – define a área do talhão j em hectares;

As variáveis do modelo são expressas por:
$x_{ij\bar{t}} \in \{0,1\}$ – é a variável de decisão relativa ao plantio da variedade i no talhão j no mês $\bar{t}$: $x_{ij\bar{t}} = 1$ se a variedade i da cana é plantada no talhão j no período $\bar{t}$ (mês de plantio) e $x_{ij\bar{t}} = 0$ em caso contrário;
$y_{jt} \in \{0,1\}$ – é a variável de decisão relativa à colheita da variedade i realizada no talhão j no tempo t: $y_{jt} = 1$ se a colheita no talhão j é realizada no período t (mês de colheita), e $y_{jt} = 0$ em caso contrário;
$\bar{l}_j$ – é a variável que define qual a variedade i está plantada no talhão j;
P_{i0} – é a variável que representa o desvio de produtividade em relação à produtividade máxima da variedade i;
P_{it} – é a variável que representa a produtividade em toneladas da variedade i no mês de colheita t, tal que, os valores de P_{it} são determinados na seção 4.4;

Os conjuntos utilizados no modelo são:
$I_{plantio}$ é o conjunto de meses possíveis para o plantio da variedade de cana, tal que, $I_{plantio}$={1,2,3,9,10}, em que 1 representa o mês de janeiro, 2 o de fevereiro, 3 o de março, 9 representa o mês de setembro e 10 o mês de outubro.
$I_{colheita}$ é o conjunto de meses possíveis para a colheita da variedade de cana, tal que, $I_{colheita} = \{16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23\}$, em que 16 representa o mês de abril, 17 o de maio, 18 o de junho, 19 o de julho, 20 o de agosto, 21 o de setembro, 22 o de outubro e 23 o de novembro.

O modelo proposto a seguir é baseado em Ramos (2014) e neste, as variáveis de decisão são consideradas com uma pequena modificação relativa ao modelo desse autor, quando considera-se o plantio da variedade *i* apenas no primeiro ano, bem como o primeiro corte desta variedade nos talhões *j* a partir de seu período de maturação, que é determinado de acordo com o tipo de variedade plantada, o qual pode relacionar-se com cana de ano ou cana de ano e meio. No autor citado é considerado um período de 4 anos para o planejamento otimizado do plantio e da colheita da variedade. Com esta simplificação é proposto o seguinte modelo matemático, em que:

$$\text{Maximizar } \mathrm{P} = \max\left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\bar{t} \in I_{plantio}} \sum_{t=\bar{t}+10}^{\bar{t}+20} P_{it}\, x_{ij\bar{t}}\, y_{jt}\, L_j \right) \tag{1}$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\bar{t} \in I_{plantio}} x_{ij\bar{t}} = 1;\ j = 1,\ldots,k \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\bar{t} \in I_{plantio}} x_{ij\bar{t}}\, i = \bar{l}_j;\ j = 1,\ldots,k \tag{3}$$

$$\sum_{\bar{t} \in I_{plantio}} x_{ij\bar{t}}\, \bar{t} = \bar{t}_j;\ j = 1,\ldots,k \tag{4}$$

$$\sum_{t=\bar{t}_j+10}^{\bar{t}_j+20} y_{jt} = 1;\ j = 1,\ldots,k \tag{5}$$

$$t_{1j} = \sum_{t=\bar{t}_j+10}^{\bar{t}_j+20} y_{jt}\, t;\ j = 1,\ldots,k \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ijt}\, y_{jt} \geq D;\ i = 1,\ldots,n; t \in I_{colheita} \tag{7}$$

$$FI \leq \sum_{j=1}^{k} F_{ijt}\, y_{jt} \leq FS;\ i = 1,\ldots,n; t \in I_{colheita} \tag{8}$$

$$\sum_{t=1}^{t_j} \sum_{j=1}^{k} L_j\, x_{ijt} \leq 0{,}15;\ i = 1,\ldots,n \tag{9}$$

$$MI \leq \sum_{j=1}^{k} P_{it}\, y_{jt} L_j \leq MS;\ \ i = 1,\ldots,n;\ t \in I_{colheita} \tag{10}$$

$$x_{ij\bar{t}} \in \{0,1\} \quad \text{onde } i = 1,\ldots,n;\ \ j = 1,\ldots,k;\ \ \bar{t} \in I_{plantio} \tag{11}$$

$$y_{jt} \in \{0,1\} \quad \text{onde } j = 1,\ldots,k;\ t \in I_{colheita} \tag{12}$$

Deseja-se determinar o período t (mês) em que a variedade de cana-de-açúcar i plantada no talhão j deverá ser colhida, de forma a maximizar a função objetivo (1), a qual está relacionada à produção de cana-de-açúcar no primeiro ano de corte. A restrição (2) garante o plantio de uma única variedade de cana por talhão; (3) define a variedade i a ser plantada no talhão j e (4) determina o mês $\bar{t}$ de plantio em cada talhão j. A restrição (5) garante a realização da colheita em cada talhão j; (6) define o mês de colheita t em que ocorrerá o primeiro corte; (7) garante a demanda anual de sacarose da usina; (8) garante que a produção anual de fibra esteja dentro do limite estabelecido. A restrição (9) garante que cada variedade seja plantada em no máximo 15% da área total destinada ao plantio. A restrição (10) garante que a capacidade de moagem da usina seja satisfeita em cada período de colheita. As restrições (11) e (12) definem as variáveis do problema como variáveis binárias, as quais foram definidas nas variáveis do modelo apresentadas no inicio da seção.

Na próxima seção, uma metodologia de solução desenvolvida em Lima, C. (2013) é sumarizada. Esta metodologia foi explorada à resolução de um problema real associado ao modelo (1)-(12) definido nesta seção.

3 Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* (PDBB)

O modelo investigado e proposto na seção 2 associa os processos envolvidos na plantação e na colheita da cana-de-açúcar ao seu aproveitamento, visando maximizar a produtividade de cada variedade e a produção da usina, e consiste na determinação do plantio ou não da variedade i em um determinado talhão j, assim como a decisão de colheita ou não da cana em um determinado tempo (mês). Este problema trata-se de um problema de programação linear e inteira 0-1 ou podemos dizer programação inteira binária, e apresenta um elevado número de variáveis e restrições técnicas inerentes à sua definição. Assim, uma metodologia de solução de problemas de programação inteira binária faz-se necessária à resolução de problemas reais relativos a este modelo.

Neste trabalho, utilizou-se uma metodologia híbrida proposta por Lima, C. (2013), a qual se baseia em um procedimento de resolução em que o método *branch-and-bound* é adaptado ao método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores (PCPDPI) para a resolução dos modelos matemáticos referentes à cana-de-açúcar. Primeiramente realiza-se a busca da solução ótima relaxada do problema utilizando o método PCPDPI e, posteriormente, através do método *branch-and-bound* tem-se a geração de soluções inteiras, de modo a obter as soluções ótimas para o modelo proposto.

O método primal-dual explorado por Lima, C. (2013) é uma variante do proposto por Kojima; Mizuno e Yoshise (1989) e Mehrotra (1992). Este método foi desenvolvido para um problema primal-dual originário de uma combinação da função lagrangiana e da função barreira logarítmica associadas a um problema de programação linear com variáveis canalizadas ($0 \leq x \leq 1$), que relaxam as condições de integralidade 0-1 do problema. Tais autores demonstraram a complexidade do tempo polinomial deste método e exploraram uma função potencial primal-dual variante da função barreira logarítmica definida em (FRISCH, 1955). A proposta de Lima, C. (2013) diferencia-se por utilizar informações do parâmetro de barreira no passo previsor, melhorando a eficiência do método, pois evita que os pontos definidos a cada iteração aproximem-se da fronteira do problema, podendo, inclusive, serem inviáveis. Já no passo corretor, as direções com informações dos aproximantes de segunda ordem referentes às condições de complementaridade do problema primal-dual são consideradas, possibilitando a aceleração da convergência do processo para a determinação da solução ótima do problema primal-dual com variáveis contínuas.

O método *branch-and-bound* utilizado em conjunto com o método PCPDPI é variante do proposto em Borchers e Mitchell (1992), com modificações realizadas em Lima, C. (2013) que melhoraram os resultados obtidos e seu desempenho computacional, principalmente na modificação de um teste de integralidade proposto por esses autores e explorado em conjunto com o critério de otimalidade do método PCPDPI. As principais modificações propostas e realizadas nesta metodologia são: os procedimentos previsor e corretor, para a determinação de direções de busca e atualização da solução, foram efetuados em uma mesma iteração; o teste de integralidade, que avalia se alguma variável está convergindo para uma fracionária no intervalo [0,1], é realizado em conjunto com os critérios de otimalidade do método PCPDPI, em que se verifica a factibilidade primal, a factibilidade dual e a complementaridade entre as variáveis primal-dual positivas do problema. Procurou-se utilizar o teste dessa maneira, de modo a evitar que esse método seja interrompido com antecedência, impedindo que alguma componente já convergisse para zero ou um ao final do processo e, dessa forma, gerasse mais ramificações que o necessário. Com essa estratégia, o número de iterações no método *branch-and-bound* foi reduzido, melhorando o desempenho do método híbrido. Outra melhoria foi feita na atualização do parâmetro de barreira, a qual foi realizada em ambos os procedimentos previsor e corretor, o qual influencia diretamente na direção de centragem do método, cuja força de centragem determina pontos mais centralizados no interior da região factível do problema. Um acelerador de convergência definido em Wright (1997), que pré-multiplica o tamanho do passo a ser dado em uma direção de busca em uma iteração qualquer, diminui o número de iterações realizadas pelo método de pontos interiores, melhorando a convergência do método.

Em resumo, a metodologia híbrida desenvolvida em Lima, C. (2013) consiste em: i) primeiramente realizar a busca da solução ótima relaxada do problema através do método PCPDPI; ii) determinar, a partir do teste de integralidade, se existem componentes da solução ótima obtida a serem integralizadas; iii) caso existam componentes a serem integralizadas, escolhe-se uma e a partir dela, subproblemas associados ao problema principal são gerados pelo método *branch-and-bound*, considerados em uma árvore de possíveis ramificações; iv) as ramificações consistem na inserção de inequações do tipo $x_i \leq 0$ ou $x_i \geq 1$ em cada nó da árvore ou subproblema considerado; v) cada subproblema é solucionado através do método PCPDPI e o nó é sondado quando uma das situações ocorrerem: uma solução inteira 0-1 é obtida ou o subproblema é infactível ou é ilimitado; vi) dentre todas as soluções inteiras obtidas, através de comparações, guarda-se ou escolhe-se aquela que, de fato, é a solução ótima 0-1 do problema.

4 Resultados numéricos

Para encontrar as soluções viáveis de um problema teste relativo ao modelo (1)-(12), o método PDBB apresentado em Lima, C. (2013), implementado computacionalmente em linguagem de programação C++, no ambiente de programação *Borland C++ Builder 6.0* e foi utilizado a resolução do problema real visto nesta seção.

Na seção 4.1 são apresentados os cálculos prévios necessários para obter o planejamento ótimo do plantio e de uma colheita da cana-de-açúcar, resultados estes mostrados nas seções 4.3 e 4.4, respectivamente, finalizando com a apresentação dos dados e cálculos necessários para determinar a solução ótima do problema de maximização de produtividade proposto.

4.1 Cálculos prévios

Para efetuar cálculos intermediários e obter as soluções do problema investigado, foram utilizados os dados contidos nas Tabelas 1 e 2, que são dados reais de uma usina do Estado de São Paulo apresentados em Lima, A. D. (2009). A Tabela 1 mostra os dados sobre as variedades de cana-de-açúcar, considerando 10 variedades, das quais 5 variedades são cana de ano e meio e outras 5 variedades são cana de ano. Sendo que A_i representa a produtividade de açúcar fermentescível (POL) da variedade i; F_i representa a produtividade de fibra da variedade i; e P_i é a produtividade da cana-de-açúcar da variedade i. A Tabela 2 apresenta a área dos talhões da usina, considerando 14 talhões de dimensões variadas.

Tabela 1 - Estimativas dos valores da produtividade por variedades em t/ha^2

Dados das Variedades										
I	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\mathbf{A_i}$	16,42	20,4	18,46	18,38	17,05	17,54	15,8	12,84	20,77	15,01
$\mathbf{F_i}$	13,94	12,9	12,63	11,32	12,51	10,91	10,33	9,28	16,12	11,59
$\mathbf{P_i}$	100	186	158	179	165	155	158	155	183	155
Tipo	Ano e meio	Ano e meio	Ano e meio	Ano e meio	Ano e meio	Ano	Ano	Ano	Ano	Ano

Fonte: Lima, A. D. (2009)

Tabela 2 - Área dos Talhões em ha^2

Dados dos Talhões												
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**13**	**14**
8,49	4,52	4,22	5,74	6,61	30,41	5,08	12,01	54,95	3,78	10,43	8,79	57,79

Fonte: Lima, A. D. (2009)

Os cálculos intermediários estão relacionados à estimativa da produção de fibra F_{ij}, estimativa da produção de sacarose A_{ij} e a capacidade de moagem M_{ij} da usina para o talhão j com a variedade i, relacionados ao tamanho dos talhões L_j, dados pelo conjunto de equações (13)-(15).

$$A_{ij} = A_i L_j \tag{13}$$
$$F_{ij} = F_i L_j \tag{14}$$
$$M_{ij} = M_i L_j \tag{15}$$

A equação (13) calcula a estimativa total de sacarose no talhão j para uma variedade i, a equação (14) calcula a estimativa total de fibra no talhão j para uma variedade i e a equação (15) calcula a estimativa da moagem gerada pelo talão j para uma variedade i.

Além dos índices de fibra, sacarose e moagem é preciso levar em consideração os meses destinados ao plantio da cana-de-açúcar, assim como, os meses destinados à colheita. Os períodos destinados à plantação são determinados de acordo com o tipo da variedade e região do país. Na região centro sul do Brasil, a cana de ano e meio é plantada nos meses de janeiro, fevereiro e março, $\bar{t} \in \{1, 2, 3\}$ já a cana de ano é plantada em setembro e outubro $\bar{t} \in \{9, 10\}$.

O tipo de cana-de-açúcar determina também o tempo em que a cana-de-açúcar leva para atingir seu pico máximo de produtividade: a cana de ano e meio tem seu pico de máxima produtividade 18 meses após o seu plantio, já a cana de ano atinge seu pico de máxima produtividade 12 meses após seu plantio. No entanto, as variedades de cana-de-açúcar não são necessariamente colhidas exatamente quando atingem seu pico máximo de produtividade, por restrições operacionais da usina, capacidade de moagem e de colheita. Elas podem ser colhidas em até 2 meses antes ou 2 meses depois do mês de seu pico de maturação. Na região centro-

sul do Brasil, o período mais indicado para a colheita da cana é entre os meses de abril e novembro. Dessa forma, a Tabela 3 mostra as possibilidades para os meses de colheita *t* para as variedades abordadas em função da data de plantio e considerando que pode haver colheita com até 2 meses de desvio do ponto de máxima produtividade da cana destas variedades. Destaca-se também, que não há ocorrência de colheita da variedade nos meses de janeiro a abril e no mês de dezembro.

Tabela 3 – Possibilidades para os meses de colheita *t* de acordo com os meses de plantio $\bar{t}$

Conjunto dos meses de colheita de acordo com os meses de plantio		
Tipo de variedade	$\bar{t}$	t
Cana de ano e meio	1	{16, 17, 18, 19, 20}
	2	{17, 18, 19, 20, 21}
	3	{18, 19, 20, 21, 22}
Cana de ano	9	{18, 19, 20, 21, 22}
	10	{19, 20, 21, 22, 23}

Utilizando os dados das tabelas 1, 2 e 3 e os dados obtidos com os cálculos intermediários (13)-(15), podemos determinar através do método PDBB qual variedade *i* deverá ser plantada no talhão *j*, determinar em qual mês $\bar{t}$ deverá acontecer o plantio da variedade e determinar o mês *t* de colheita no talhão *j*, obtendo, assim, a melhor solução para o modelo (1)-(12) proposto em relação à maximização da produtividade. Os resultados obtidos são apresentados na seção 4.2.

4.2 Planejamento ótimo para o plantio da cana-de-açúcar

Com essas considerações no planejamento ótimo para o plantio, determinado pelo método PDBB, foram obtidos os resultados obtidos são apresentados na Tabela 4.

Tabela 4 - Escolha binária da variedade a ser plantada em cada talhão

Decisão da variedade *i* a ser plantada no talhão *j*														
i x j	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A Tabela 4 mostra a solução binária encontrada, em que o valor 1 (um) assume a decisão de que a variedade *i* será plantada no talhão *j* e o valor 0 (zero) caso contrário.

Em relação a esta tabela, obtêm-se os seguintes resultados sobre a decisão do plantio da variedade *i* no talhão *j*: a variedade 1 deverá ser plantada no talhão 7, a variedade 2 nos talhões 1 e 9, a variedade 3 nos talhões 5 e 6, a variedade 4 nos talhões 8 e 12, a variedade 5 no

talhão 13, a variedade 6 no talhão 11, a variedade 7 no talhão 2, a variedade 8 nos talhões 4 e 10, a variedade 9 no talhão 14 e a variedade 10 no talhão 3, como mostra a Tabela 4.

Para o planejamento ótimo do mês de plantio determinado pelo método PDBB, foram obtidos os resultados obtidos são apresentados na Tabela 5.

Tabela 5 - Escolha do mês de plantio em cada talhão

Decisão do mês $\bar{t}$ em que a variedade *i* será plantada no talhão *j*														
$\bar{t}$ x j	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A Tabela 5 mostra a solução binária encontrada para a decisão do mês que haverá plantio em cada talhão em que o valor 1 (um) assume a decisão de que haverá plantio no mês t no talhão *j* e o valor 0 (zero) caso contrário.

Em relação a esta tabela , obtêm-se os seguintes resultados sobre a decisão do mês $\bar{t}$ que haverá plantio em cada talhão j: seguintes resultados: nos talhões 1, 5 e 6 o plantio deverá ser realizado no mês de janeiro ($\bar{t} = 1$), nos talhões 7 e 8 o plantio em fevereiro ($\bar{t} = 2$), nos talhões 12 e 13 o plantio em março ($\bar{t} = 3$), nos talhões 2, 4 e 11 plantio em setembro ($\bar{t} = 9$) e nos talhões 3, 9, 10 e 14 o plantio realizado no mês de outubro ($\bar{t} = 10$), como mostra a Tabela 5,

Dessa forma, a Tabela 5 mostra que: os talhões 1, 5 e 6 receberão canas-de-açúcar das variedades 2 e 3 que são canas de ano e meio, logo serão plantadas em janeiro. Nos talhões de número 7 e 8 serão plantadas as variedades 1 e 4, que são variedade de cana de ano e meio e o plantio acontecerá em fevereiro. As variedades 4 e 5, canas de ano e meio, serão plantadas em março. Os talhões o 2, 4 e 11 receberão, respectivamente, as variedades 7, 8 e 6, que são canas de ano e o plantio deverá ocorrer no mês de setembro. E nos talhões 3, 9, 10 e 14 o plantio foi realizado no mês de outubro e esses talhões receberão as variedades de cana de ano 8, 9 e 10.

4.3 Planejamento ótimo para a colheita da variedade de cana-de-açúcar plantada

Para a tomada de decisão sobre quais variedades serão colhidas nos talhões, bem como o mês em que isto irá ocorrer, foi realizada a determinação da solução ótima relativa à colheita da variedade, considerando que todas as variedades de cana-de-açúcar plantadas estão no primeiro período de colheita relativo a seu primeiro corte, ou seja, não foram consideradas as rebrotas e os cortes relativos ao segundo, terceiro e quarto anos de colheita.

A decisão binária, relativa ao período *t* que deverá ser realizada a colheita no talhão *j* no primeiro corte encontra-se na Tabela 6.

Tabela 6 - Decisão binária para a colheita nos talhões

Decisão de colheita em cada talhão no 1º corte														
t x j	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**	**09**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
16 (Abr)	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17 (Mai)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
18 (Jun)	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19 (Jul)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
20 (Ago)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
21 (Set)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
22 (Out)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
23 (Nov)	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1

Na Tabela 6, a decisão otimizada pelo método PDBB, do mês t em que a variedade i é plantada no talhão j determinou que: em abril $(t = 16)$ a colheita será realizada nos talhões 1, 5 e 6, em maio $(t = 17)$ será colhido o talhão 8, em junho $(t = 18)$ serão colhidos os talhões 2 e 4, em julho $(t = 19)$ será colhido o talhão 7, em agosto $(t = 20)$ será colhido o talhão 11, em setembro $(t = 21)$ será colhido o talhão 12, em outubro $(t = 22)$ será colhido o talhão 13 e em novembro $(t = 23)$ serão colhidos os talhões 3, 9, 10 e 14.

As variedades colhidas nos talhões 1, 5 e 6 são do tipo cana de ano e meio e deverão ser plantadas em janeiro $(\bar{t} = 1)$ e colhidas em abril $(t = 16)$, logo serão colhidas com dois meses de antecedência do seu pico máximo de produtividade. A colheita no talhão 8 também acontecerá dois meses antes do pico máximo, pois a variedade de cana de ano e meio plantada em fevereiro $(\bar{t} = 2)$ deverá ser colhida em maio $(t = 17)$. Assim como, nos talhões 2 e 4 que receberam as variedades de cana de ano plantadas em setembro $(\bar{t} = 9)$ e serão colhidas no mês de junho $(t = 18)$.

As colheitas nos talhões 7 e 11 serão as únicas a serem realizadas no tempo exato do pico máximo de produtividade. No talhão 7, que recebeu variedade de cana de ano, o plantio deverá ser realizado em fevereiro$(\bar{t} = 2)$ e a colheita em julho $(t = 19)$. No mês de agosto $(t = 20)$ será colhido o talhão 11 que recebeu a variedade de cana de ano que foi plantada em setembro$(\bar{t} = 9)$.

Em setembro $(t = 21)$ a colheita acontecerá no talhão 12, onde deverá ser plantada uma variedade de cana de ano e meio em março $(\bar{t} = 3)$, logo a variedade será colhida um mês após seu pico máximo de produtividade. No talhão 13 que receberá uma variedade de cana de ano no mês de março$(\bar{t} = 3)$, a colheita ocorrerá em outubro $(t = 22)$, dois meses depois de seu pico máximo. E por fim, em novembro $(t = 23)$ serão colhidos os talhões 3, 9, 10 e 14 que receberão as variedades de cana de ano, todas plantadas em outubro $(\bar{t} = 10)$ e então, colhidas dois meses depois do pico de máxima produtividade.

O fato que dificulta as variedades de cana-de-açúcar de serem colhidas nos seus respectivos picos de máxima produtividade é a exigência de atendimento da capacidade de moagem da usina expressa pela inequação (10). Para que a simulação computacional se torne mais verídica, as produtividades das variedades da cana foram recalculadas de acordo com o possível desvio da data correta de colheita cana e um novo planejamento foi realizado apresentado na próxima seção.

4. 4 Cálculo da produtividade das variedades e da produção da usina

O valor da função objetivo (1) relativo à produção máxima de sacarose, determinado em relação ao modelo (1)-(12) é determinada de acordo com o que segue.

Considera-se que, variedades *i* de ano e meio colhidas após 18 meses e variedades *i* de ano colhidas exatamente após 12 meses estão em seu pico máximo de produtividade P_{i0}. Mas por restrições operacionais da usina, capacidade de moagem e de colheita, as variedades podem ser colhidas fora do seu pico máximo de produtividade em até 2 meses antes ou 2 meses depois do mês de seu pico máximo. Assim, uma nova variável de desvio de produtividade $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ é considerada, a qual, a partir da definição do mês de colheita *t* da variedade *i* mostrada na Tabela 7, auxiliará na determinação da produtividade real dessa variedade no mês em que foi colhida, considerando a variável de desvio *m*. Para isto utiliza-se a expressão definida em Ramos (2014), a qual é utilizada para o cálculo da produtividade real da variedade *i*, no mês de colheita t, com desvio m, expressa por:

$$P_{it} = P_{it}(m) = (-0{,}0243m^2 + 1)P_{i0} \tag{16}$$

A equação (16) determina a produtividade da variedade *i* no momento da colheita, considerando o desvio *m* referente ao tempo em meses a mais ou a menos em relação à produtividade máxima P_{i0} da variedade *i* de cana de açúcar.

A Tabela 7 apresenta o planejamento final de plantio e colheita de maneira sintetizada, em que, a partir do desvio *m* são determinados os valores de produtividade reais P_{it} obtidos em relação aos valores de produtividade máxima pela equação (16) quando consideram-se esses desvios.

Tabela 7 - Planejamento ótimo para o plantio e colheita da variedade de cana de açúcar.

Planejamento do plantio e colheita de cana-de-açúcar							
j	***i***	**Tipo**	$\bar{t}$	***t***	***m***	P_{i0}	P_{it}
1	2	Ano e meio	1	16	-2	1579,14	1425,65
2	7	Ano	9	18	-2	714,16	644,74
3	10	Ano	10	23	2	654,1	590,52
4	8	Ano	9	18	-2	889,7	803,22
5	3	Ano e meio	1	16	-2	1044,38	942,87
6	3	Ano e meio	1	16	-2	4804,78	4337,76
7	1	Ano e meio	2	19	0	508	508
8	4	Ano e meio	2	17	-2	2149,79	1940,83
9	10	Ano	10	23	2	10220,7	9227,25
10	8	Ano	10	23	2	585,9	528,95
11	6	Ano	9	20	0	1616,65	1616,65
12	4	Ano e meio	3	21	1	1100,85	1074,1
13	5	Ano e meio	3	22	2	1450,35	1309,38
14	9	Ano	10	23	2	10575,57	9547,63

Na Tabela 7 podemos ver o planejamento ótimo completo do plantio e colheita da cana-de-açúcar. Ela apresenta o planejamento final de plantio e colheita de maneira sintetizada, em que se consideram os talhões *j*, as variedades *i*, o tipo de cana plantada no talhão *j*, o mês $\bar{t}$ em que a variedade *i* foi plantada, o mês *t* em que a variedade *i* será colhida, o desvio de produtividade *m*, a produtividade máxima P_{i0} e a produtividade determinada em relação ao desvio *m* P_{i1m}. Esses valores foram utilizados para a determinação do valor ótimo de produção da usina.

A metodologia híbrida desenvolvida em Lima, C. (2013) foi implementada em linguagem de programação C++, e forneceu, primeiramente, a solução ótima relaxada do problema pelo

método PCPDPI em 187 milésimos de segundos, sendo necessárias 33 iterações executadas por esse método.

A partir do teste de integralidade proposto por Borchers e Mitchell (1992) e acoplado ao método PCPDPI foram necessárias que 21 componentes fossem integralizadas, sendo que, destas componentes, 8 eram relativas à variável de plantio $x_{ij\bar{t}}$ e 13 à variável de colheita y_{jt}, as quais são do tipo 0-1.

Escolhido um nó inicial a ser ramificado pelo método *branch-and-bound*, foram necessárias mais 21 ramificações, ou seja, 42 subproblemas, os quais foram solucionados pelo método PCPDPI em 3222 milésimos de segundos.

Desse modo, foi possível obter a solução ótima final do problema de maximização de produtividade proposto (1)-(12) e o valor ótimo da função objetivo determinado pela equação (1). Esse valor associado à produção máxima da usina foi determinado quando considerou-se os valores P_{i1m} mostrados pela Tabela 7, que resultou em 43.135,94 toneladas por hectare.

5 Conclusões

Neste trabalho, um modelo de planejamento ótimo para o plantio e colheita da cana-de-açúcar foi implementado e resolvido através de um procedimento híbrido envolvendo os métodos primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* (PDBB), o qual auxiliou na determinação de uma solução ótima para o modelo investigado.

Neste sentido, o método proposto foi utilizado com sucesso para resolver um problema real contendo 10 variedades e 14 talhões. A metodologia mostrou-se eficiente, uma vez que encontrou a solução ótima em um tempo computacional muito pequeno. Em trabalhos futuros serão realizadas implementações de instâncias maiores de plantio e colheita de cana-de-açúcar em um horizonte otimizado de planejamento que envolva 4 anos possíveis de colheita nos talhões *j* a partir de uma variedade *i* plantada nesse talhão.

6 Referências

ACOMPANHAMENTO DA SAFRA BRASILEIRA: cana-de-açúcar. Brasília: CONAB, v. 3, n. 1, p.1-66, abr. 2016. Disponível em: <http://www.conab.gov.br/OlalaCMS/uploads/arquivos/16_08_18_12_03_30_boletim_cana_portugues_-_2o_lev_-_16-17.pdf>. Acesso em: 01 out. 2016.

BORCHERS, B.; MITCHELL, J. E. **Using an interior point method in a branch and bound algorithm for integer programming**. 1992. Disponível em: <http://euler.nmt.edu/~brian/intptbb.pdf> Acesso em: 01 out. 2016.

FLORENTINO, H. O. **Programação linear inteira em problemas de aproveitamento da biomassa residual de colheita da cana-de-açúcar.** 2006. 64 f. Tese (Livre Docência) - Instituto de Biociências de Botucatu, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Botucatu, 2006.

FRISCH, K. R. **The logarithmic potential method of convex programming.** 1955. Technical Report - University Institute of Economics, Oslo, Norway, 1955.

KOJIMA, M. MIZUNO, S.; YOSHISE, A. A primal-dual interior-point algorithm for linear programming In: MEGIDDO, N. (Ed.). **Progress in mathematical programming: interior-point and related methods**. New York: Springer-Verlag, 1989. p. 29–48.

LIMA, A. D. **Otimização do aproveitamento do palhiço da cana-de-açúcar**. 2009. 76 f. Tese (Doutorado em Agronomia) - Faculdade de Ciências Agronômicas de Botucatu, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2009.

LIMA, C. **Métodos híbridos de pontos interiores e de programação inteira 0-1 para problemas de custo de colheita da cana-de-açúcar e de custo de coleta e geração de energia relacionados à sua biomassa**. 2013. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2013.

MEHROTRA, S. On the implementation of a primal–dual interior point method. **SIAM Journal on Optimization**, v.2, n. 4, p. 575-601, 1992.

RAMOS, R. P. **Planejamento do plantio e da colheita de cana-de-açúcar utilizando técnicas matemáticas de otimização**. 2014. 69 f. Tese (Doutorado em Agronomia) - Faculdade de Ciências Agronômicas de Botucatu – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2014.

ROSSETTO, R. Árvore do conhecimento: cana-de-açúcar: maturação. Brasília, DF: EMBRAPA, 2008. Disponível em: < http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/cana-de-acucar/arvore/CONTAG01_39_711200516717.html>. Acesso em: 01 out. 2008.

SILVEIRA, L. C. I.; BARBOSA, M. H. P.; OLIVEIRA, M. W. Manejo de variedades de cana-de-açúcar predominantes nas principais regiões produtoras de cachaça de Minas Gerais. **Informe Agropecuário**, Belo Horizonte, v. 23, n. 217, p. 25-32, 2002.

UNICA, União da Agroindústria Canavieira de São Paulo, **Acompanhamento quinzenal da safra**. Disponível em: <http://www.unicadata.com.br/listagem.php?idMn=63> Acesso em: 01 out. 2016.

WRIGHT, S. J. **Primal-dual interior-point methods.** Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, c1997.